Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

Univerzita Komenského, Bratislava

Cliffordove algebry

Simona Veselá

Vedúci práce:
Mgr. Tibor Macko, PhD.

17. mája 2019

49841398

Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

Meno a priezvisko študenta: Simona Veselá
Študijný program: matematika (Jednoodborové štúdium, bakalársky I. st., denná forma)
Študijný odbor: matematika
Typ záverečnej práce: bakalárska
Jazyk záverečnej práce: slovenský
Sekundárny jazyk: anglický

Názov: Cliffordove algebry
Clifford algebras

Anotácia: Je potrebné naštudovať a prezentovať definíciu, vlastnosti a klasifikáciu Cliffordových algebier Cl_{r,s}, ich reprezentácií, a aplikáciu na problém vektorových polí na sférach. To si vyžaduje dôkladné pochopenie materiálu z literatúry a jeho prezentáciu vlastnými slovami s podrobnými vysvetleniami argumentov a ilustračnými príkladmi.

Cieľ: 1. Naštudovať a prezentovať definíciu, vlastnosti a klasifikáciu Cliffordových algebier Cl_{r,s}.
2. Naštudovať a prezentovať klasifikáciu konečno-rozmerných reprezentácií Cliffordových algebier Cl_{r,s}.
3. Naštudovať a prezentovať aplikáciu klasifikácie reprezentácií na problém vektorových polí na sférach.

Literatúra: 1. Lawson, H. B. a Michelsohn, M.-L.: Spin geometry, Princeton University Press, 1989.
2. Porteous, I. R.: Clifford algebras and the classical groups, Cambridge University Press, 1995.

Kľúčové slová: kvadratická forma, Cliffordova algebra, reprezentácia algebry, vektorové pole

Vedúci: Mgr. Tibor Macko, PhD.
Katedra: FMFI.KAGDM - Katedra algebry, geometrie a didaktiky matematiky
Vedúci katedry: doc. RNDr. Pavel Chalmovianský, PhD.

Dátum zadania: 31.10.2018

Dátum schválenia: 05.11.2018

prof. RNDr. Ján Filo, CSc.
garant študijného programu

.... študent

.... vedúci práce

Čestne prehlasujem, že som túto prácu vypracovala samostatne s použitím citovaných zdrojov a konzultácií s vedúcim práce.

Bratislava 17. mája 2019

....

Chcela by som poďakovať Dr. Tiborovi Mackovi za trpezlivosť, ochotu, entuziazmus a zaujímavú tému. Ďalej človeku znalému gramatiky za to, že prečítala 60+ strán pre ňu nezmyselného textu. Rodičom, za všetko. Bratovi.

Abstrakt

Cliffordove algebry sú konštrukcie, ktoré vznikajú z vektorových priestorov s rôznou kvadraticou formou. V tejto práci detailne uvedieme klasifikáciu všetkých Cliffordových algebier nad reálnymi konečnorozmernými vektorovými priestormi. Ďalej opíšeme úplnú teóriu ireducibilných reprezentácií takýchto algebier, ktorá, ako sa ukáže, bude veľmi jednoduchá. V poslednej časti uvedieme z knihy *Spin Geometry* [9] od H. Lawsona a M. Michelsohnovej konštrukciu najväčšieho možného počtu všade lineárne nezávislých hladkých vektorových polí na sférach S^n s použitím Cliffordových algebier. Dôkaz maximality je výsledok J. F. Adamsa [1], ktorý zďaleka prevyšuje ambície tejto práce.

Kľúčové slová: kvadratická forma, Cliffordova algebra, reprezentácia algebry, vectorové pole

Abstract

Clifford algebras are constructs, built on top of vector spaces with various quadratic forms. In this thesis, we work out in detail the classification of all Clifford algebras over finite-dimensional real vector spaces. Next we describe a complete theory of irreducible representations of these algebras, which is, as it turns out, very simple. In the last chapter, we give a construction, taken from a book *Spin Geometry* [9] by H. Lawson and M. Michelsohn, of a largest number of linearly independent smooth vector fields on spheres S^n utilising Clifford algebras. The proof of maximality is by J. F. Adams [1], which is beyond the scope of this thesis.

Keywords: quadratic form, Clifford algebra, representation of an algebra, vector field

Obsah

Úvod

Na historický vývoj matematiky by sa dalo nahliadnuť cez pojem zovšeobecňovania. Vektorové priestory sú zovšeobecnením planárnej a priestorovej geometrie, skalárne súčiny sú zovšeobecnením merania uhlov, 3-rozmerné variety sú zovšeobecnením mnohostenov. Na Cliffordove algebry, pomenované podľa škótskeho matematika Williama Kingdona Clifforda, by sa dalo pozerať ako zovšeobecnenie reálnych, komplexných a kvaterniónových číselných systémov.

Táto analógia sa dá ilustrovať nasledovne:*

- Grupa $SO(1)$ je izomorfná s $\{-1, 1\}$, teda s jednotkovými reálnymi číslami.
- Grupa $SO(2)$ je izomorfná s jednotkovými komplexnými číslami.
- Existuje surjektívny homomorfizmus grúp $\rho : \mathbb{H}_1 \to SO(3)$ s $\ker = \{-1, 1\}$, kde $\mathbb{H}_1$ sú jednotkové kvaternióny. (Detaily napr. tu [11, str. 63-65].)
- Existuje podgrupa $Spin(n)$ jednotkových prvkov (niektorej Cliffordovej algebry) taká, že existuje surjektívny homomorfizmus $\rho : Spin(n) \to SO(n)$ s $\ker = \{-1, 1\}$. (Detaily napr. tu [5, str. 1-10].)

Cliffordove algebry sú konštrukcia užitočná ako v matematike, tak aj vo fyzike.

Prvú časť tejto práce strávime detailnou prípravou pojmov a konštrukcií. Potom v časti 2.1 definujeme Cliffordove algebry na konečných reálnych vektorových priestoroch. V tej istej kapitole pri úplnej klasifikácii takýchto algebier zistíme, že sme nedefinovali nič exotické, ale vystačíme si s maticovými algebrami nad $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, či $\mathbb{H}$.

Reprezentácie, čiže akcia na vektorové priestory, budú témou ďalšej kapitoly. Reprezentácie Cliffordových algebier sa používajú v hľadaní reprezentácií iných objektov, napríklad grupy $SO(n)$.

V poslednej kapitole sa budeme venovať maximálnemu možnému počtu v každom bode lineárne nezávislých vektorových polí na sférach. Tu sa znova ukážu zaujímavé geometrické vlastnosti akcií Cliffordových algebier na vektorových priestoroch. Konkrétne nájdeme nejaký skalárny súčin a isté významné prvky Cliffordových algebier $e_1, \ldots, e_n$ takú že budeme mať $e_i \cdot v \perp v$ pre všetky vektory v z vektorového priestoru.

*kde grupa $SO(n)$ je grupa reálnych ortonormálnych $n \times n$ matíc s determinantom 1

Kapitola 1

Úvodné pojmy

1.1 Kvadratický priestor

Začíname rozsiahlou kapitolou, kde sa definujú potrebné pojmy a uvedú dôležité príklady.

V celom texte budeme predpokladať, že všetky vektorové priestory sú nad poľom $\mathbb{R}$ a majú konečný rozmer.

Definícia 1.1.1. Všetky štvorcové matice $n \times n$, $(n \geq 1)$ nad poľom (prípadne okruhom) k označujeme symbolom $k(n)$.

Konečnorozmernému reálnemu vektorovému priestoru bežne priraďujeme bilineárnu funkciu *skalárny súčin* $\langle \cdot, \cdot \rangle : (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$, kde ak $x, y \in \mathbb{R}^n$, tak

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

Tento skalárny súčin sa dá charakterizovať (identickou) maticou $I \in R(n)$

$$\langle x, y \rangle = x^T I y$$

Kvadratický priestor je zovšeobecnenie tohoto pojmu.

Definícia 1.1.2 (Kvadratický priestor)**.** Majme konečnorozmerný vektorový priestor V s dimenziou n, a symetrickú maticu $A \in \mathbb{R}(n)$. Definujme *kvadratickú formu* $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$, pre $x, y \in V$ ako

$$\langle x, y \rangle = x^T A y.$$

Vektorový priestor V s kvadratickou formou voláme kvadratický priestor.

Z lineárnej algebry poznáme takúto charakterizáciu kvadratickej formy:

Lema 1.1.3. *Ak máme funkciu $s : V \times V \to \mathbb{R}$, ktorá spĺňa nasledujúce podmienky:*

- *bilineárnosť*
- *symetrickosť*

potom je s kvadratická forma, resp. vieme nájsť symetrickú maticu $A \in \mathbb{R}(n)$ takú, že $s(x, y) = x^T Ay$.

Definícia 1.1.4 (Kvadratická norma)**.** Majme kvadratický priestor V. *Kvadratická norma* je funkcia

$$\begin{aligned} q : V &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \langle x, x \rangle \end{aligned}$$

Definícia 1.1.5. Kvadratický priestor V sa nazýva *nedegenerovaný*, práve keď je jeho matica regulárna.

1.2 Maticový invariant

Symetrických matíc v $\mathbb{R}(n)$ je veľa, a je jasné, že veľa z nich definuje rovnakú kvadratickú formu, len pre inú bázu.

Našťastie z lineárnej algebry poznáme výsledky, ktoré tento problém riešia.

Je elementárny výsledok, že pre každý skalárny súčin dá vybrať báza tak, aby bola matica, ktorá s ním korešponduje diagonálna. Navyše na diagonálnych pozíciách bude mať iba čísla $-1, 1, 0$. Dôkaz napríklad tu [7, str. 109, veta 14.2].

Podľa Sylvestroveho zákonu zotrvačnosti vieme, že takáto matica je až na permutáciu diagonálnych prvkov jedinečná. Usporiadaním riadkov tak, aby išli najprv jednotky, potom mínus jednotky a potom nuly dostaneme kanonickú maticu pre danú kvadratickú formu. Dôkaz napríklad tu [7, 111, veta 14.3]. Keď neskôr povieme, že vyberieme kvadratický priestor, máme na mysli, že matica, ktorá charakterizuje kvadratickú formu, je už v takomto tvare vzhľadom na štandardnú bázu $\{e_1, \dots, e_n\}$.

Poznámka 1.2.1. Kvadratický priestor je *nedegenerovaný* práve vtedy, keď kanonická matica jeho súčinu má na diagonále iba ± 1.

Definícia 1.2.2. *Signatúra* nedegenerovaného kvadratického priestoru je (p, q) dvojica čísel, počet jednotiek, počet mínus jednotiek.

Definícia 1.2.3. Majme čísla $p, q \in \mathbb{N}_0$. Potom $p + q$-rozmerný kvadratický priestor $\mathbb{R}^{p+q}$ so súčinom so signatúrou (p, q) značíme $\mathbb{R}^{p,q}$.

Príklad 1.2.4 (Minkowského priestor)**.** Vezmime si $\mathbb{R}^{3,1}$ so štandardnou bázou $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$. Čiže máme súčin definovaný ako:

$$\langle x, y \rangle = x^T \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} y = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 - x_4 y_4.$$

Tento priestor volá *Minkowského priestor* a využíva sa vo fyzike, konkrétne v špeciálnej teórii relativity, kde, laicky povedané, bázické vektory e_1, e_2, e_3 reprezentujú priestor a e_4 reprezentuje čas.

Celý Minkowského priestor môžeme nazvať časopriestor a bod v ňom môžeme nazvať udalosťou- vieme kde a kedy sa udalosť stala.

V relativite sa ukazuje, že Minkowského metrika (metrika odvodená od kvadratického súčinu) je tá správna metrika na meranie vzdialeností v časopriestore.

1.3 k-algebra

Definícia 1.3.1. Algebra (k-algebra) $\mathscr{A}$ je vektorový priestor nad poľom k s bilineárnym násobením

$$\cdot : \mathscr{A}^2 \to \mathscr{A}.$$

Teda pre každé $x, y, z \in \mathscr{A}$ a prvky poľa $\alpha, \beta \in k$ platí:

1. $x \cdot (y + z) = z \cdot y + x \cdot z$
2. $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$
3. $(\alpha x) \cdot (\beta y) = (\alpha\beta)(x \cdot y)$

Pod dimenziou algebry $\mathscr{A}$ budeme rozumieť dimenziu jej vektorového priestoru.

Po tejto časti, budeme pracovať iba s $\mathbb{R}$-algebrami.

Pre nás budú všetky algebry asociatívne s jednotkou.

Spravidla napísaním $a \cdot b$ myslíme násobenie dvoch prvkov algebry a bez bodky λb myslíme násobenie nejakým skalárom.

Poznámka 1.3.2. Keď zabudneme na štruktúru vektorového priestora máme, že každá algebra je okruh.

Príklad 1.3.3. Matice $\mathbb{R}(n)$ s násobením tvoria $\mathbb{R}$-algebru . Ich dimenzia je n^2. Je to preto, lebo matice $\{E_{i,j} | 1 \leq i, j \leq n\}^*$ sú zjavne lineárne nezávislé a generujú (ako vektorový priestor) celé $\mathbb{R}(n)$.

Definícia 1.3.4. Pod *štandardnou bázou* maticovej algebry $k(n)$ (prípadne aj $M_{p\times q}(k)$ pre neštvorcové matice) myslíme bázu $\{E_{i,j} | 1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq q\}$ definovanú v predošlom príklade.

Príklad 1.3.5. Komplexné čísla $\mathbb{C}$ sa dajú chápať aj ako vektorový priestor nad poľom $\mathbb{R}$ s bázou $\{1, i\}$, ale aj ako algebra s bežným násobením komplexných čísel. Táto $\mathbb{R}$-algebra má dimenziu 2.

Komplexné čísla sú ale aj pole, teda môžeme tvoriť $\mathbb{C}$-algebry. Samozrejme komplexné čísla $\mathbb{C}$ ako $\mathbb{C}$-algebra majú dimenziu 1.

*Matica $E_{i,j} \in \mathbb{R}(n)$ je matica, ktorá má všade nuly okrem na mieste (i, j), kde má jednotku.

Príklad 1.3.6. Komplexné matice $\mathbb{C}(n)$ chápané ako $\mathbb{C}$-algebra majú dimenziu n^2 z rovnakého dôvodu ako pri reálnych maticiach a sú generované $\{E_{k,l}|1 \leq k, l \leq n\}$.

Na druhú stranu komplexné matice $\mathbb{C}(n)$ chápané ako $\mathbb{R}$-algebra majú väčšiu dimenziu, konkrétne $2n^2$ generované $\{E_{k,l}, iE_{k,l}|1 \leq k, l \leq n\}$.

Príklad 1.3.7. Kvaternióny sú okruh (konkrétnejšie teleso[†]) definované nasledovne: $\mathbb{H} = \{a + bi + cj + dk|a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$. Pre násobenie na $\mathbb{H}$ platí

- distributívnosť násobenia
- asociatívnosť násobenia
- i, j, k komutujú s reálnymi číslami, teda pre $\forall p \in \mathbb{R}$ platí $pi = ip$,$pj = jp$,$pk = kp$.
- nasledujúce vzťahy

·	i	j	k
i	-1	k	-j
j	-k	-1	i
k	j	-i	-1

Z definície kvaterniónov je ľahko vidieť, že kvaternióny sú aj štvorrozmerný vektorový priestor nad $\mathbb{R}$, teda sú aj $\mathbb{R}$-algebrou.

Nemôžeme síce hovoriť o $\mathbb{H}$-algebrách, lebo kvaternióny nie sú pole, ale úplne analogicky ako pri komplexných maticových algebrách máme, že $\mathbb{H}(n)$ má dimenziu $4n^2$ ako reálna algebra (generátory $\{E_{r,s}, iE_{r,s}, jE_{r,s}, kE_{r,s}|1 \leq r, s \leq n\}$)

Príklad 1.3.8. Majme dve k-algebry $\mathscr{A}, \mathscr{B}$. Potom ich priamy súčet $\mathscr{A} \oplus \mathscr{B}$ je k-algebra. Táto k-algebra je vektorový priestor, ktorý je priamym súčtom vektorových priestorov $\mathscr{A}$ a $\mathscr{B}$., Násobenie sa definuje po zložkách.

$$(a \oplus b) \cdot (a' \oplus b') = (a \cdot a') \oplus (b \cdot b')$$

Samozrejme aj sčitovanie musí byť po zložkách, lebo tak je to vo vektorových priestoroch.

Definícia 1.3.9. Povieme, že nejaká podmnožina algebry $X \subset \mathscr{A}$ antikomutuje, ak platí

$$x \cdot y = -y \cdot x, \quad \forall x \neq y \in X.$$

[†]Teleso je ako pole, bez požiadavky komutativity,

Definícia 1.3.10. Majme k-algebry $\mathscr{A}, \mathscr{B}$ a $\phi : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$. Funkcia ϕ je homomorfizmom algebier ak platia nasledujúce podmienky:

$$\begin{aligned} F(rx) &= rF(x) \quad \forall r \in k, \forall x \in \mathscr{A} \\ F(x+y) &= F(x) + F(y) \quad \forall x, y \in \mathscr{A} \\ F(xy) &= F(x)F(y) \quad \forall x, y \in \mathscr{A} \end{aligned}$$

Izomorfizmus je bijektívny homomorfizmus.

Z definície je jasné, že homomorfizmus algebier je aj homomorfizmom vektorových priestorov, ktoré v sebe algebry majú.

Definícia 1.3.11. Majme k-algebru $\mathscr{A}$. *Anti-automorfizmus* je bijektívne zobrazenie, $\psi : \mathscr{A} \to \mathscr{A}$ kde platí

$$\begin{aligned} F(rx) &= rF(x) \quad \forall r \in k, \forall x \in \mathscr{A} \\ F(x+y) &= F(x) + F(y) \quad \forall x, y \in \mathscr{A} \\ F(xy) &= F(y)F(x) \quad \forall x, y \in \mathscr{A} \end{aligned}$$

Od izomorfizmu sa líši poslednou vlastnosťou násobenia.

Príklad 1.3.12. Transpozícia maticovej algebry $\mathbb{R}(n)$ je anti-automorfizmus.

Definícia 1.3.13. *Ideál $\mathscr{I}$ k-algebry $\mathscr{A}$* je vektorový podpriestor $\mathscr{A}$, ktorý je navyše ideál $\mathscr{A}$ ako okruhu.

Definícia 1.3.14 (Faktorizácia)**.** Algebru $\mathscr{A}$ *faktorizujeme* ako okruh. Značíme ${}^{\mathscr{A}}\!/_{\mathscr{I}}$. Faktorový objekt je algebra, lebo ideál $\mathscr{I}$ bol podpriestor.

1.4 Moduly

V tejto časti si predstavíme základy teórie modulov.

Čitateľ, ktorý nepozná teóriu modulov spraví najlepšie, ak si predstaví, že pole sa má ku vektorovému priestoru, ako sa má okruh ku modulu:

$$\begin{array}{lcl} \text{polia} & \to & \text{vektorové priestory} \\ \text{okruhy} & \to & \text{moduly} \end{array}$$

Definícia 1.4.1. (Ľavý modul) Majme okruh R. Trojica $(M, +, \cdot)$ je ľavý R-modul, ak:

1. $+ : M \to M$ je binárna operácia a $(M, +)$ je komutatívna grupa

2. $\cdot : (R, M) \to M$ je násobenie modulu okruhom také, že pre $\forall r, s \in R$ a $\forall u, v \in M$ platí:
   (a) $r \cdot (u + v) = r \cdot u + r \cdot v$
   (b) $(r + s) \cdot u = r \cdot u + s \cdot u$
   (c) $(rs) \cdot u = r \cdot (s \cdot u)$

(Pravý modul by mal analogickú definíciu, len ho okruh násobil sprava.)

Poznámka 1.4.2. Prázdna množina $\emptyset$ nie je podmodul, lebo $\emptyset$ nie je grupa.

Definícia 1.4.3. (Homomorfizmus) Majme dva ľavé R-moduly M, N. Funkcia $f : M \to N$ sa nazýva homomorfizmus modulov keď platí:

$$f(r \cdot u + s \cdot v) = r \cdot f(u) + s \cdot f(v), \quad \forall r, s \in R, u, v \in M.$$

Izomorfizmus je bijektívny homomorfizmus.

Homomorfizmus R-modulu niekedy voláme aj R-lineárna funkcia (analogicky ako vo vektorových priestoroch voláme „homomorfizmy“ lineárne funkcie).

Definícia 1.4.4 (Faktorový modul)**.** Majme R-modul M a nejaký jeho podmodul N.
Faktorový modul $({}^{M}\!/_{N}, +, \cdot)$ je definovaný ako iné faktorové objekty.
Majme $\sim$ reláciu ekvivalencie na M taká že

$$m \sim m' \iff m - m' \in N$$

Prvky ${}^{M}\!/_{N}$ sú triedy ekvivalencie $[a]_\sim$ zapísateľné aj ako $a+N$. Operácie definujeme $(a + N) + (b + N) = a + b + N$ a $r \cdot (a + N) = r \cdot a + N$. Dôkaz, že sú dobre definované je ľahký a podobný ako pri okruhoch.

Definícia 1.4.5 (Voľný modul)**.** Majme okruh R a nejakú množinu E. Pod voľným R-modulom M rozumieme R-modul taký, že:

i) Každý prvok $m \in M$ sa dá napísať ako konečná lineárna kombinácia $m = \sum_{i=1}^{k} r_i e_i$, pre $r_i \in R$ a $e_i \in E$.

ii) Ak pre rôzne prvky $e_1, \ldots, e_k$ platí $\sum_{i=1}^{k} r_i e_i = 0$, tak $r_1 = \ldots = r_k = 0$.

Voľné moduly sú veľmi podobné vektorovým priestorom, napríklad voľný R-modul M generovaný *konečnou* množinou E je izomorfný s $M \cong \underbrace{R \times \ldots \times R}_{|E|}$, kde R je považovaný za R-modul.[‡]. Značíme ho $R^{|E|}$.

[‡] **Definícia**(Priamy súčin modulov) Majme R moduly M, N. Ich súčin $(M \times N, +', \cdot')$ je R modul, kde $(M \times N, +')$ je priamy súčin grúp a

$$\begin{aligned} \cdot' : R \times (M \times N) &\to M \times N \\ r \cdot' (m, n) &\mapsto (r \cdot m, r \cdot n). \end{aligned}$$

Dá sa o nich dokázať veľa podobných faktov ako o vektorových priestorov, napríklad $R^n \cong R^m \Leftrightarrow n = m$. Taktiež na definovanie homomorfizmu R-modulov $f : R^n \to M$ stačí definovať obrazy generujúcej množiny, teda homomorfizmus $f : R^n \to R^m$ sa dá zapísať ako matica $M_{m\times n}(R)$.

Konkrétne budeme používať kvaterniónové voľné moduly a matice.

Teória modulov je rozsiahla a zaujímavá, ale my teraz uvedieme nejaké špeciálne prípady, ktoré budeme potrebovať neskôr.

Príklad 1.4.6. Majme nejaký okruh R. Potom R so svojím okruhovým sčítavaním a násobením tvorí R-modul.

Príklad 1.4.7. Majme nejaký okruh R a jeho ideál $I \subset R$. Potom I so svojím sčitovaním a násobením je R-modul. Podmienky z definície vyplývajú z distributivity a asociativity násobenia v okruhoch. Podmienka, aby $\cdot : (R, M) \to M$ bola binárna operácia, teda $r \cdot i \in I$ platí z toho, že I je ideál.

Príklad 1.4.8. Majme nejaký okruh R a jeho *ľavý* ideál $I \subset R$. Potom I so sčitovaním a násobením je R-modul. Hneď to vyplýva z predošlého príkladu, lebo I sme nikdy nenásobili sprava.

Definícia 1.4.9. (Podmodul) Majme R-modul M a jeho podmnožinu $N \subset M$. Ak je N so zúženými operáciami $+, \cdot$ modulom, hovoríme, že N je podmodul M.

Samozrejme každé M je svojím vlastným podmodulom.

Definícia 1.4.10. R-modul M voláme jednoduchý, ak nemá vlastné podmoduly.

Príklad 1.4.11. Ak je V vektorovým priestorom nad k, V je aj voľný k-modulom.

Príklad 1.4.12. Ak je $\mathscr{A}$ k-algebrou, je aj k-modulom. Jednoducho prvky algebry navzájom nenásobíme. Ostatné vlastnosti plynú z predošlého príkladu.

1.5 Tenzorový súčin

V tejto kapitole sa opierame o text [2, str. 24-31].

Naším cieľom bude definovať tzv. tenzorový súčin dvoch $\mathbb{R}$-algebier $\mathscr{A}\otimes\mathscr{B}$. Všeobecne povedané tenzorový súčin dvoch objektov nejakého typu nám dá objekt toho istého typu (teda napr $\mathscr{A} \otimes \mathscr{B}$ bude $\mathbb{R}$-algebra).

Spravíme to v troch krokoch. Najprv ponúkneme intuíciu pre tenzorový súčin vektorových priestorov ako najjednoduchší príklad tejto konštrukcie. Potom uvedieme formálnu definíciu tenzorového súčinu modulov (kde sú vektorové priestory iba špeciálnym prípadom). Nakoniec sa dostaneme ku tenzorovému súčinu algebier. Z časti 1.4 vieme, že každá algebra je modul, takže nám zostane definovať násobenie na tenzorovom súčine modulov $\mathscr{A} \otimes \mathscr{B}$, aby z toho vznikla algebra.

Teória vektorových priestorov zvyčajne začne ponúknutím definície. Potom sa postupne vybuduje pojem ako lineárna nezávislosť, generovanie, báza. Keď sa nájde vo vektorovom priestore konečná báza $\{e_1, ..., e_n\}$, môže sa ukázať, že potom je takýto priestor izomorfný k^n.

Ale môže sa zvoliť aj opačný prístup. Zoberieme ľubovoľnú množinu $X = \{x_i\}_{i\in I}$ (transcendentálnych) prvkov, pole k a skonštruujeme množinu vektorov $\{a_1x_{i_1} + a_2x_{i_2} + \ldots + a_mx_{i_m} | a_1, \ldots, a_m \in k, x_{i_k} \neq x_{i_l}, k \neq l, m \in \mathbb{N}_0\}$, ktorá je čo najvoľnejšia, teda platí $a_1x_{i_1} + a_2x_{i_2} + \ldots + a_mx_{i_m} = b_1x_{i_1} + b_2x_{i_2} + \ldots + b_mx_{i_m}$ vtedy a práve vtedy, keď $a_1 = b_1, \ldots, a_m = b_m$. Hovoríme, že máme *najvoľnejší vektorový priestor nad množinou* X a značíme $F(X)$ od slova *free - voľný*.

Tenzorový súčin je konštrukcia, ktorá z vektorových priestorov vytvára nové vektorové priestory. Majme dva vektorové priestory V, W nad rovnakým poľom k a ich bázy $\{e_1, \ldots, e_n\}, \{e'_1, \ldots, e'_m\}$. Tenzorový súčin $V \otimes W$ bude vektorový priestor nad k dimenzie $\dim(V \otimes W) = \dim(V)\dim(W) = nm$. Týmto by definícia tenzorového súčinu pre vektorové priestory mohla skončiť, lebo taký priestor je až na izomorfizmus jediný, ale nám nepostačí, lebo ako bolo spomenuté, budeme chcieť pojem tenzorového súčinu ďalej zovšeobecňovať. Toto je formálna definícia.

Definícia 1.5.1 (Tenzorový súčin modulov)**.** Majme nejaké R-moduly M, N pre okruh R. Potom tenzorový súčin je $M \otimes N = {}^{T(M \times N)}\!/\!_{\sim}$, kde $\sim$ je najmenšia relácia ekvivalencie obsahujúca

- **distributívnosť**

$$(v_1, w) + (v_2, w) \sim (v_1 + v_2, w)$$
$$(v, w_1) + (v, w_2) \sim (v, w_1 + w_2)$$
$$\forall v_1, v_2, v \in M, \quad \forall w_1, w_2, w \in N.$$

- **skalárne násobky**

$$c(v, w) \sim (cv, w)$$
$$c(v, w) \sim (v, cw)$$
$$\forall v \in M, \quad \forall w \in N \quad \forall c \in R$$

Triedu ekvivalencie $[(v, w)]$ označujeme $v \otimes w$.

Poznámka 1.5.2. Platí, že $V \otimes U \cong U \otimes V$.

Poznámka 1.5.3. Táto definícia je pre konečnorozmerné vektorové priestory ekvivalentná s definíciou $V \otimes W = T(\{e_1, \ldots, e_m\} \times \{e'_1, \ldots, e'_n\})$, kde $\{e_1, \ldots, e_m\}$ je báza V a $\{e'_1, \ldots, e'_n\}$ je báza W.

Naozaj platí, že $V \otimes W$ má bázu $\{e_i \otimes e'_j | i, j\}$.

Definícia 1.5.4. (Tenzorový súčin algebier) Tenzorový súčin algebier $\mathscr{A}, \mathscr{B}$, značený ako $\mathscr{A} \otimes \mathscr{B}$ je algebra, ktorej vektorový priestor je tenzorový súčin vektorových priestorov algebier $\mathscr{A}, \mathscr{B}$, s násobením $\cdot : \mathscr{A} \otimes \mathscr{B} \times \mathscr{A} \otimes \mathscr{B} \to \mathscr{A} \otimes \mathscr{B}$ definovaným ako

$$(a \otimes b) \cdot (a' \otimes b') := (a \cdot a') \otimes (b \cdot b')$$

.

Tu môžeme vidieť jedno odôvodnenie konceptu tenzorového súčinu, lebo zatiaľ čo každý n-rozmerný vektorový priestor nad poľom k je izomorfný, nie každá n-rozmerná $\mathbb{R}$-algebra je izomorfná.

1.6 Izomorfizmy tenzorového súčinu maticových algebier

Budeme potrebovať nasledujúce lemy, ktoré budeme opakovane používať, keď budeme ukazovať izomorfizmy tenzorového súčinu maticových algebier.

Nasledujúca je dôležitá všeobecná vlastnosť pre faktorové objekty.

Lema 1.6.1. *[Univerzálna vlastnosť faktorového modulu]*

Majme R-moduly M, N, podmodul N modulu M. Majme $f : M \to M'$ homomorfizmus, taký, že $f \restriction N = 0$. Potom existuje jediný homomorfizmus $f' : {}^{M}\!/_{N} \to M'$ taký, že diagram

$$\begin{tikzcd}
N \arrow[r, hook, "i"] \arrow[dr, "f\restriction N=0"'] & M \arrow[r, "p"] \arrow[d, "f"] & {}^{M}\!/_{N} \arrow[dl, dotted, "f'"] \\
& M' &
\end{tikzcd}$$

komutuje.

Dôkaz. Existencia:

Definujme $f'(v+N) = f(v)$. Táto definícia je dobrá, lebo ak $(v'+n'), (v''+n'') \in (v+N)$, tak platí, že $v'-v'' \in N$, teda $f(v'-v'') = 0$, z čoho plynie, že $f(v') = f(v'')$, teda hodnota funkcie nezávisí od reprezentanta. Diagram komutuje, lebo $f(v) = f'(v+N) = f' \circ p(v)$.

Funkcia f' je aj R-lineárna, lebo

$$\begin{aligned}
f'(v+u+N) = & \\
&= f(v+u) \\
&= f(v) + f(u) \\
&= f'(v+N) + f'(u+N)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f'(r \cdot v + N) = & \\
&= f(r \cdot v) \\
&= r \cdot f(v) \\
&= r \cdot f'(v+N)
\end{aligned}$$

Jednoznačnosť:
Ak by existovali dve také funkcie f', f'' a líšili sa napríklad na prvku $(v+N) \in {}^{M}\!/_{N}$.

$$\begin{aligned} f'(v+N) &\neq f''(v+N) \\ f'(p(v)) &\neq f''(p(v)) \\ f(v) &\neq f(v) \end{aligned}$$

A to je spor.

□

Poznámka 1.6.2. Táto lema platí pre faktorové konštrukcie grúp, okruhov, algebier, modulov, topologických priestorov,...

Konkrétne pre okruhy (ak moduly M, M' boli aj okruhy a N ideál) musíme ešte skontrolovať násobenie.

$$\begin{aligned} f'(uv+N) &= \\ &= f(uv) \\ &= f(u)f(v) \\ &= f'(u+N)f'(v+N) \end{aligned}$$

Lema 1.6.3. *[11, str. 83, 11.6] Platia nasledovné izomorfizmy*

i) $\mathbb{R}(p) \otimes \mathbb{R}(q) \cong \mathbb{R}(pq)$.

ii) $\mathbb{R}(p) \otimes k \cong k(p)$ *pre* $k = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$.

iii) $\mathbb{C} \otimes \mathbb{C} \cong \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$

iv) $\mathbb{H} \otimes \mathbb{C} \cong \mathbb{C}(2)$

v) $\mathbb{H} \otimes \mathbb{H} \cong \mathbb{R}(4)$

vi) $k(p) \oplus k(p) \cong k(p) \otimes (\mathbb{R} \oplus \mathbb{R})$ *pre* $k = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$, $n = 1, 2, \ldots$*(pre* $n = 1$ *je* $k(n)$ *myslené ako* $k(1) \cong k$*)*

vii) $k(n) \otimes \mathbb{R} \cong k(n)$

Dôkaz. i) To, že izomorfizmus platí pre vektorové priestory je jasné, stačí len porovnať dimenzie

$$\begin{array}{c} \dim \mathbb{R}(pq) = (pq)^2 \\ \| \\ \dim \mathbb{R}(p) \otimes \mathbb{R}(q) = p^2 q^2 \end{array}$$

My ale potrebujeme izomorfizmus ako algebry, teda potrebujeme konkrétnu lineárnu funkciu

$$f' : \mathbb{R}(p) \otimes \mathbb{R}(q) \to \mathbb{R}(pq)$$

takú, ktorá spĺňa

$$f'(A \otimes B) f'(A' \otimes B') = f'(AA' \otimes BB')$$

Musíme ale overiť, že f' bude aj izomorfizmus $\mathbb{R}(pq)$ a $\mathbb{R}(p) \otimes \mathbb{R}(q)$ ako vektorových priestorov.

K tomu budeme potrebovať fakt, že $\mathbb{R}^{pq}$ a $M_{p,q}(\mathbb{R})$ sú izomorfné ako vektorový priestor.[§]. Zoberme teda nejaký pekný izomorfizmus [¶].

$$\phi : \mathbb{R}^{pq} \to M_{p,q}(\mathbb{R})$$

Definujme homomorfizmus vektorových priestorov $f : F(\mathbb{R}(p) \times \mathbb{R}(q)) \to \mathbb{R}(pq)$ určený na generátoroch $F(\mathbb{R}(p) \times \mathbb{R}(q))$ a lineárne rozšírený.

$$\begin{aligned} f : F(\mathbb{R}(n) \times \mathbb{R}(m)) &\to \mathbb{R}(pq) \\ (A, B) &\mapsto (v \mapsto \phi^{-1}(A\phi(v)B^T)) \end{aligned}$$

Obraz prvku (A, B) sme definovali podľa jeho účinku na vektoroch $v \in \mathbb{R}^{pq}$.

Musíme ukázať, že $v \mapsto \phi^{-1}(A\phi(v)B^T)$ je lineárne zobrazenie.

$$\begin{aligned} f(A,B)(\alpha v + \beta u) = & \\ &= \phi^{-1}(A\phi(\alpha v + \beta u)B^T = \\ &= \phi^{-1}(A(\alpha\phi(v) + \beta\phi(u))B^T = && \text{(lineárnosť } \phi) \\ &= \phi^{-1}(\alpha A\phi(v)B^T + \beta A\phi(u)B^T) = \\ &= \phi^{-1}(\alpha A\phi(v)B^T) + \phi^{-1}(\beta A\phi(u)B^T) = && \text{(lineárnosť } \phi^{-1}) \\ &= \alpha\phi^{-1}(A\phi(v)B^T) + \beta\phi^{-1}(A\phi(u)B^T) = && \text{(lineárnosť } \phi^{-1}) \\ &= \alpha f(A,B)(v) + \beta f(A,B)(u) \end{aligned}$$

teda $f((A, B)) \in \mathbb{R}(pq)$.

Nech je I ideál definovaný reláciou ekvivalencie $\sim$ z definície tenzorového súčinu[‖]

[§]Napríklad $M_{p,q}(\mathbb{R})$ sú matice $p \times q$ nad $\mathbb{R}$

[¶]Taký, čo namapuje štandardnú bázu $\mathbb{R}^{pq}$ na štandardnú bázu $M_{p,q}(\mathbb{R})$ (teda $\{E_{i,j}\}$)

[‖]Teda $I = \{(A, B) \in F(\mathbb{R}(p) \times \mathbb{R}(q)), (A, B) \sim (0, 0)\}$

Na to, aby sme mohli použiť lemu 1.6.1 o univerzálnej vlastnosti

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, hook, "i"] \arrow[dr, "f\restriction I"'] & F(\mathbb{R}(p)\times\mathbb{R}(q)) \arrow[r, "p"] \arrow[d, "f"] & F(\mathbb{R}(p)\times\mathbb{R}(q))/I \arrow[dl, dotted, "f'"] \\ & \mathbb{R}(pq) & \end{tikzcd}$$

potrebujeme, aby $f \restriction I = 0$. Nulovosť stačí otestovať na generátoroch $\sim$.

Zvolíme nejaké $v \in \mathbb{R}^{pq}$, označíme kvôli prehľadnosti $w = \phi(v)$.

- **distributívnosť**

$$\begin{aligned} &f((A_1, B) + (A_2, B) - (A_1 + A_2, B))(v) = \\ &\quad = f(A_1, B)(v) + f(A_2, B)(v) - f(A_1 + A_2, B)(v) = \\ &\quad = \phi^{-1}(A_1 w B^T + A_2 w B^T - (A_1 + A_2) w B^T) = \\ &\quad = 0 \end{aligned}$$

  Druhá pozícia úplne rovnako.

- **skalárne násobky**

$$\begin{aligned} &f(c(A,B) - (cA, B))(v) = \\ &\quad = f(c(A, B)) - f(cA, B) = \\ &\quad = cf(A, B) - f(cA, B) = \\ &\quad = \phi^{-1}(cAwB^T - (cA)wB^T) = \\ &\quad = 0 \end{aligned}$$

  Druhá pozícia úplne rovnako.

Z lemy 1.6.1 máme homomorfizmus vektorových priestorov
$f' : \mathbb{R}(p) \otimes \mathbb{R}(q) \to \mathbb{R}(pq)$.

Aby sme ukázali bijektivitu, ukážeme, že f' pošle bázu na bázu.

Báza tenzorového súčinu vektorového priestoru je karteziánsky súčin báz pôvodných vektorových priestorov.

Báza $\mathbb{R}(p) \otimes \mathbb{R}(q)$ je $\{(E_{i,j} \otimes E_{k,l}) | 1 \leq i, j \leq p, 1 \leq k, l \leq q\}$

Báza $\phi(\mathbb{R}^{pq}) = M_{p\times q}(\mathbb{R})$ je samozrejme tá štandardná.

Počítajme:

$$
\begin{aligned}
f(E_{i,j}, E_{k,l})(\phi^{-1}(E_{m,n})) = & \\
&= \phi^{-1}(E_{i,j}E_{m,n}E_{l,k}) = \\
&= \phi^{-1}(E_{i,j}E_{m,n}E_{l,k}) = \\
&= \phi^{-1}(\delta_{j,m}\delta_{n,l}E_{i,k})
\end{aligned}
$$

Teda $f(E_{i,j}, E_{k,l})$ zobrazí všetky vektory $\phi^{-1}(E_{m,n})$ štandardnej bázy do nuly až na jeden, a ten pošle na iný vektor štandardnej bázy $\phi(\mathbb{R}^{pq})$.

Inými slovami $f(E_{i,j}, E_{k,l})$ ako matica je nejaká $E_{x,y}$ pre nejaké x, y.

Navyše pre obraz iného prvku bázy $\mathbb{R}(p) \otimes \mathbb{R}(q)$, $f(E_{i',j'}, E_{k',l'})$ bude iná matica $E_{x',y'}$.

Funkcia f' zobrazuje bázu na bázu, je to izomorfizmus.

Najdôležitejšie sme si nechali na záver, teda nám nám zostáva ukázať, že

$$f'(A \otimes B)f'(A' \otimes B') = f'(AA' \otimes BB')$$

$$
\begin{aligned}
f'(A \otimes B)f'(A' \otimes B')(v) = & \\
&= f'(A \otimes B)(\phi^{-1}(A'\phi(v)B'^T)) = \\
&= \phi^{-1}(AA'\phi(v)B'^T B^T) = \\
&= \phi^{-1}(AA'\phi(v)(BB')^T) = \\
&= f'(AA' \otimes BB')
\end{aligned}
$$

ii) Táto časť je značne jednoduchšia.

Znova platí, že izomorfizmus vektorových priestorov (modulov) je jasný, ale na izomorfizmus algebier musíme definovať nejaký homomorfizmus
$f : F(\mathbb{R}(p) \times k) \to k(p)$, taký, že lema 1.6.1 zaručí diagram:

$$
\begin{tikzcd}
I \arrow[r, hook, "i"] \arrow[dr, "f\restriction I"'] & F(\mathbb{R}(p) \times k) \arrow[r, "p"] \arrow[d, "f"] & F(\mathbb{R}(p) \times k)/I \arrow[dl, dotted, "f'"] \\
& k(p) &
\end{tikzcd}
$$

Kde I je ideál korešpondujúcej relácie ekvivalencie tenzorového súčinu $\sim$ ako minule.

Nech $f(A, b) = bA \in k(n)$.

Overenie, že $f \restriction I = 0$ je veľmi jednoduché, preto ho nebudeme robiť.

Máme teda homomorfizmus $f' : \mathbb{R}(p) \otimes k \to k(p)$.

Nech má k reálnu bázu ako vektorový priestor $\{e_i\}_{i \in \mathscr{J}}$. Potom báza $\mathbb{R}(p) \otimes k$ je $\{E_{i,j} \otimes e_{i'}\}$ kde $\{E_{i,j}\}$ je štandardná báza $\mathbb{R}(p)$.

Štandardná báza $k(n)$ je $\{e_{i'} E_{i,j}\}$, teda je zrejmé, že f' pošle (štandardnú) bázu na (štandardnú) bázu. Teda f' je izomorfizmus vektorových priestorov(modulov).

Overíme, že f' je aj izomorfizmus algebier.

$$\begin{aligned} f'(A \otimes b) f'(A' \otimes b') = & \\ &= bAb'A' = \\ &= bb'AA' = \\ &= f'(AA' \otimes bb') \end{aligned}$$

iii) Pôjdeme úplne rovnako.

Majme homomorfizmus

$$\begin{aligned} f : F(\mathbb{C} \times \mathbb{C}) &\to \mathbb{C} \oplus \mathbb{C} \\ z_1, z_2 &\mapsto z_1 z_2 \oplus z_1 \bar{z}_2 \end{aligned}$$

Majme rovnako definovaný ideál I korešpondujúci ku $\sim$.

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, hook, "i"] \arrow[dr, "f \restriction I"'] & F(\mathbb{C} \times \mathbb{C}) \arrow[r, "p"] \arrow[d, "f"] & F(\mathbb{C} \times \mathbb{C})/I \arrow[dl, dotted, "f'"] \\ & \mathbb{C} \oplus \mathbb{C} & \end{tikzcd}$$

Overenie, že $f \restriction I = 0$ by bolo veľmi jednoduché.

Máme homomorfizmus $f' : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$ vektorových priestorov.

Báza $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ je $\{1 \otimes 1, 1 \otimes i, i \otimes 1, i \otimes i\}$.

Zaujímavé je, že tak môže vyzerať aj báza $\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$ ($\{1 \oplus 1, 1 \oplus i, i \oplus 1, i \oplus i\}$), ale funkcia f' nemapuje jednu na druhú, ani by nemohla, lebo k nej korešpondujúca funkcia f by nebola nulová na ideáli I.

Pozrime sa teda na obrazy f' bázy $\mathbb{C} \otimes \mathbb{C}$.

$$\begin{aligned} 1 \otimes 1 &\mapsto 1 \oplus 1 \\ 1 \otimes i &\mapsto i \oplus -i \\ i \otimes 1 &\mapsto i \oplus i \\ i \otimes i &\mapsto -1 \oplus 1 \end{aligned}$$

A ľahko je vidieť, že obrazy generujú celý $\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$.

Overíme, že f' je aj izomorfizmus algebier.

$$\begin{aligned}
f'(z_1, z_2)f(z_1', z_2') = \\
&= (z_1 z_2 \oplus z_1 2\bar{z}_2)(z_1' z_2' \oplus z_1' \bar{z_2'}) = \\
&= (z_1 z_2 z_1' z_2' \oplus z_1 \bar{z}_2 z_1' \bar{z_2'}) = \\
&= (z_1 z_1' z_2 z_2' \oplus z_1 z_1' \bar{z}_2 \bar{z_2'}) = && \mathbb{C} \text{ je komutatívne} \\
&= (z_1 z_1' z_2 z_2' \oplus z_1 z_1' \overline{z_2 z_2'}) = \\
&= f(z_1 z_1', z_2 z_2')
\end{aligned}$$

iv) Teraz použijeme podobnú techniku ako v i)

Potrebujeme identifikovať $\mathbb{R}$-moduly $\mathbb{H} \cong \mathbb{C}^2$. Spravíme to klasicky.

$$\begin{aligned}
\phi : \mathbb{C}^2 &\to \mathbb{H} \\
\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} &\mapsto z_1 + j z_2
\end{aligned}$$

A ϕ bude izomorfizmus modulov.

Definujme homomorfizmus:

$$\begin{aligned}
f : F(\mathbb{H} \times \mathbb{C}) &\to C(2) \\
(q, c) &\mapsto (v \mapsto \phi^{-1}(q\phi(v)c))
\end{aligned}$$

Znova sme obraz prvku (q, c) definovali podľa jeho účinku na vektoroch $v \in \mathbb{C}^2$.

Musíme ukázať, že $f(q, c)$ je naozaj lineárne zobrazenie.

$$\begin{aligned}
f(q, c)(\alpha v + \beta u) = \\
&= \phi^{-1}(q\phi(\alpha v + \beta u)c = \\
&= \phi^{-1}(q(\alpha\phi(v) + \beta\phi(u))c = && (\text{lineárnosť } \phi) \\
&= \phi^{-1}(\alpha q\phi(v)c + \beta q\phi(u)c) = \\
&= \phi^{-1}(\alpha q\phi(v)c) + \phi^{-1}(\beta q\phi(u)c) = && (\text{lineárnosť } \phi^{-1}) \\
&= \alpha\phi^{-1}(q\phi(v)c) + \beta\phi^{-1}(q\phi(u)c) = && (\text{lineárnosť } \phi^{-1}) \\
&= \alpha f(q, c)(v) + \beta f(q, c)(u)
\end{aligned}$$

teda $f(q,c) \in \mathbb{C}(2)$.

Majme znovu diagram

$$\begin{tikzcd}
I \arrow[r, hook, "i"] \arrow[dr, "f\restriction I"'] & F(\mathbb{H}\times\mathbb{C}) \arrow[r, "p"] \arrow[d, "f"] & F(\mathbb{H}\times\mathbb{C})\big/I \arrow[dl, dotted, "f'"] \\
 & \mathbb{C}(2) &
\end{tikzcd}$$

Úplne analogicky sa ukáže nulovosť f na I.

Máme homomorfizmus $f' : \mathbb{H}\otimes\mathbb{C} \to \mathbb{C}(2)$.

Zoberme si bázu $\mathbb{H}\otimes\mathbb{C}$ $\{1\otimes 1, 1\otimes i, i\otimes 1, i\otimes i, j\otimes 1, j\otimes i, k\otimes 1, k\otimes i\}$, nájdime jej obrazy vo $\mathbb{C}(2)$ a zistíme, že generujú celé $\mathbb{C}(2)$.

Jeden obraz vypracujeme detailne, ostatné len uvedieme.

$$j\otimes i \in \mathbb{H}\otimes\mathbb{C}$$
$$f'(j\otimes i) \in \mathbb{C}(2)$$

$$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \mapsto \phi^{-1}(j1i) = \phi^{-1}(-k) = \begin{pmatrix}0\\i\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}i\\0\end{pmatrix} \mapsto \phi^{-1}(jii) = \phi^{-1}(-j) = \begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \mapsto \phi^{-1}(jji) = \phi^{-1}(-i) = \begin{pmatrix}-i\\0\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}0\\i\end{pmatrix} \mapsto \phi^{-1}(j(-k)i) = \phi^{-1}(1) = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

Teda máme $f'(j\otimes i) = \begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix}$.

Doplníme všetky ostatné.

$$f'(1\otimes 1) = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}, \quad f'(1\otimes i) = \begin{pmatrix}i & 0\\0 & i\end{pmatrix}, \quad f'(i\otimes 1) = \begin{pmatrix}i & 0\\0 & -i\end{pmatrix},$$
$$f'(i\otimes i) = \begin{pmatrix}-1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}, \quad f'(j\otimes 1) = \begin{pmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{pmatrix}, \quad f'(j\otimes i) = \begin{pmatrix}0 & -i\\i & 0\end{pmatrix},$$
$$f'(k\otimes 1) = \begin{pmatrix}0 & -i\\-i & 0\end{pmatrix}, \quad f'(k\otimes i) = \begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}$$

Obrazy generujú celé $\mathbb{C}(2)$, lebo veľmi ľahko vygenerujeme jej štandardnú bázu jedným sčítaním/odčítaním a vydelením ± 2. Napríklad:

$$iE_{2,1} = \frac{f'(j \otimes i) - f'(k \otimes 1)}{2}.$$

Teraz treba skontrolovať, či je f' aj izomorfizmom algebier.

$$\begin{aligned} f'(q \otimes c)f'(q' \otimes c')(\phi^{-1}(w)) = & \\ &= f'(q \otimes c)(\phi^{-1}(q'wc')) = \\ &= \phi^{-1}(qq'wc'c) = \\ &= \phi^{-1}(qq'wcc') = \\ = f'(qq' \otimes cc')(\phi^{-1}(w)) & \end{aligned}$$

v) Veľmi podobné ako situácia pred chvíľou.

Majme izomorfizmus $\mathbb{R}$-modulov (vektorových priestorov)

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{R}^4 &\to \mathbb{H} \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} &\mapsto x_1 + x_2 i + x_3 j + x_4 k \end{aligned}$$

Definujme homomorfizmus

$$\begin{aligned} f : f(\mathbb{H} \times \mathbb{H}) &\to \mathbb{R}(4) \\ (q, r) &\mapsto (x \mapsto \phi^{-1}(q\phi(x)\tilde{r})) \end{aligned}$$

kde

$$\begin{aligned} \sim : \mathbb{H} &\to \mathbb{H} \\ r &\mapsto \tilde{r} = -j\bar{r}j \end{aligned}$$

je anti-automorfizmus** zvaný *reverz* a

** $\widetilde{(rs)} = -j\overline{rs}j = -j\bar{s}\bar{r}j = (-j\bar{s}j)(-j\bar{r}j) = \tilde{s}\tilde{r}$

$$\begin{aligned} - : \mathbb{H} &\to \mathbb{H} \\ a + bi + cj + dk &\mapsto \overline{a + bi + cj + dk} = a - bi - cj - dk \end{aligned}$$

je automorfizmus konjugácie (analogický komplexnej konjugácii).

Linearita obrazu $f(q, r)$ je ľahko vidieť.

Máme

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, hook, "i"] \arrow[dr, "f\restriction I"'] & F(\mathbb{H} \times \mathbb{H}) \arrow[r, "p"] \arrow[d, "f"] & F(\mathbb{H} \times \mathbb{H})/I \arrow[dl, dotted, "f'"] \\ & \mathbb{R}(4) & \end{tikzcd}$$

Skontrolujeme, že $f \restriction I = 0$

- **distributívnosť** Prvá pozícia je analogická s tým, čo sme už predtým robili, spravíme druhú

$$\begin{aligned} &f((q, r_1) + (q, r_2) - (q, r_1 + r_2))(v) = \\ &\quad = f(q, r_1)(v) + f(q, r_2)(v) - f(q, r_1 + r_2)(v) = \\ &\quad = \phi^{-1}(qw\tilde{r}_1 + qw\tilde{r}_2 - qw(r_1 \tilde{+} r_2)) = \\ &\quad = \phi^{-1}(qw\tilde{r}_1 + qw\tilde{r}_2 - qw(\tilde{r}_1 + \tilde{r}_2)) = \\ &\quad = 0 \end{aligned}$$

- **skalárne násobky** Prvá pozícia je znovu analogická s tým, čo sme už predtým robili.

  Majme $d \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} &f(d(q,r) - (q, dr))(v) = \\ &\quad = f(d(q, r)) - f(q, dr) = \\ &\quad = df(q, r) - f(q, dr) = \\ &\quad = \phi^{-1}(dqw\tilde{r} - qw\tilde{dr}) = \\ &\quad = \phi^{-1}(dqw\tilde{r} - qwd\tilde{r}) = \\ &\quad = 0 \end{aligned}$$

Teraz máme homomorfizmus $f' : \mathbb{H} \otimes \mathbb{H} \to \mathbb{R}(4)$.

Overiť bijektívnosť je podobné ako v predošlej časti.

Teraz skontrolujeme, že f' je aj homomorfizmom algebier.

$$\begin{aligned}
f'(q \otimes r) f'(q' \otimes r')(\phi^{-1}(w)) = &\\
&= f'(q \otimes r)(\phi^{-1}(q' w \tilde{r'})) = \\
&= \phi^{-1}(q q' w \tilde{r'} \tilde{r}) = \\
&= \phi^{-1}(q q' w \widetilde{r r'}) = \\
&= f'(q q' \otimes r r')(\phi^{-1}(w))
\end{aligned}$$

□

Poznámka 1.6.4. Teraz už vieme nejako upraviť ľubovoľný tenzorový súčin týchto dvoch tvarov. (Nech $k, l = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$), $n, m = 1, 2, \ldots$)

- $k(n) \otimes l(m) \cong k \otimes \mathbb{R}(n) \otimes l \otimes \mathbb{R}(m) \cong k \otimes l \otimes \mathbb{R}(nm) \cong (k \otimes l)(nm)$
- $(k(n) \oplus k(n)) \otimes l(m) \cong (\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}) \otimes k(n) \otimes l(m) \cong ((k \otimes l)(nm) \oplus (k \otimes l)(nm))$

  pozn. $k \otimes l$ *vieme pre všetky kombinácie* k, l.

1.7 Tenzorová algebra

Teraz definujeme koncept tenzorovej algebry, je to niečo úplne iné ako tenzorový súčin dvoch algebier.

Definícia 1.7.1 (Tenzorová algebra)**.** Majme kvadratický priestor V a jeho normu q. Potom *tenzorová algebra* je algebra

$$\mathscr{T}(V) = \sum_{r=0}^{\infty} \bigotimes^{r} V$$

na ktorej je násobenie multilineárne rozšírenie násobenia definovaného nasledovne na bázových prvkoch

$$(v_{i_1} \otimes v_{i_2} \otimes \ldots \otimes v_{i_r}) \times (v_{j_1} \otimes v_{j_2} \otimes \ldots \otimes v_{j_s}) = v_{i_1} \otimes v_{i_2} \otimes \ldots \otimes v_{i_r} \otimes v_{j_1} \otimes v_{j_2} \otimes \ldots \otimes v_{j_s}$$

pre ľubovoľné $r, s \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

Prvky sa násobia „nalepovaním“.

Teda prvok tenzorovej algebry je *konečnou* lineárnou kombináciou prvkov tzv. *čistého stupňa* s (t.j. $\bigotimes^s V$).

Máme nasledujúce vloženia

$$\mathbb{R} \to \mathscr{T}(V), a \mapsto a \cdot \bigotimes^{0} V$$

$$V \to \mathscr{T}(V), v \mapsto \bigotimes^{1} v.$$

Pre jednoduchosť budeme považovať $\mathbb{R}$ aj V ako podmnožinu (a vektorový podpriestor) $\mathscr{T}(V)$.

Pre každý vektorový podpriestor $\mathscr{T}(V)$ vektorov čistých stupňov $\bigotimes^r V$, z predošlej časti vieme, ako vyzerá jeho báza, keď poznáme bázu V. Totiž poznáme bázu tenzorového súčinu dvoch vektorových priestorov, teda aj súčin r kópii. Báza celej $\mathscr{T}(V)$ je len zjednotenie všetkých takých báz.

Lema 1.7.2. *Algebra $\mathscr{T}(V)$ je generovaná ako algebra nejakou bázou V.*

Dôkaz. Najprv vygenerujeme celé V. Potom každý prvok z bázy $\bigotimes^r V$ jednoducho vygenerujeme vynásobením r vektorov z V. Každý prvok z $\mathscr{T}(V)$ je už len konečná lineárna kombinácia vektorov čistého stupňa. □

Teraz si zadefinujeme takzvanú *vonkajšiu* algebru.

Definícia 1.7.3. Majme vektorový priestor V. *Vonkajšia algebra* je definovaná ako faktorový objekt $\Lambda V := {\mathscr{T}(V)}\big/{(v \otimes v | v \in V)}$.

Ilustračne uvedieme, že ideál z definície je lineárna kombinácia prvkov tvaru $\{a_i \otimes (v_i \otimes v_i) \otimes b_i \,|\, \forall a_i, b_i \in \mathscr{T}(V), \forall v_i \in V\}$

Tu máme vlastnosť anti-symetrie.

Lema 1.7.4. *Pre nejaké lineárne nezávislé prvky priestoru V $\{e_1 \ldots, e_k\}$ a nejakú permutáciu $\pi \in S_n$ máme $e_1 \otimes e_2 \otimes \ldots \otimes e_k = (-1)^{\operatorname{sgn}\pi} e_{\pi(1)} \otimes e_{\pi(2)} \otimes \ldots \otimes e_{\pi(k)}$ v ΛV, kde $\operatorname{sgn}\pi$ je parita permutácie π.*

Dôkaz. Permutácie sú generované transpozíciami. Stačí nám ukázať, že $e_1 \otimes e_2 = -e_2 \otimes e_1$ v ΛV, teda, že $e_1 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_1 \in (v \otimes v | v \in V)$ a naozaj, máme

$$\begin{aligned}
e_1 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_1 &\in (v \otimes v | v \in V) \\
&\Leftrightarrow \\
e_1 \otimes e_2 + e_1 \otimes e_1 + e_2 \otimes e_1 + e_2 \otimes e_2 &\in (v \otimes v | v \in V) \\
&\Leftrightarrow \\
e_1 \otimes (e_2 + e_1) + e_2 \otimes (e_1 + e_2) &\in (v \otimes v | v \in V) \\
&\Leftrightarrow (e_1 + e_2) \otimes (e_1 + e_2) \qquad \in (v \otimes v | v \in V)
\end{aligned}$$

a to je pravda. □

Zvoľme bázu V, $\{e_1, \ldots, e_n\}$. Teraz platí, že ΛV je generovaná ako vektorový priestor prvkami tvaru

$$\{e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_k} | 1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq n, 0 \leq k \leq n\}$$

Tvrdenie 1.7.5. *Platí teda, že* $\dim \Lambda V = 2^{\dim V}$.

Kapitola 2

Cliffordove algebry

2.1 Definícia

Definícia 2.1.1 (Cliffordova algebra)**.** Máme kvadratický priestor V s kvadratickou normou q. Nech je $\mathscr{I}$ ideál tenzorovej algebry $\mathscr{T}(V)$ (Definícia 1.7.1) generovaný množinou $\{x \otimes x + q(x) \cdot 1 \,|\, x \in V\}$. Kde 1 je jednotka v algebre $\mathscr{T}(V)$.

Potom Cliffordova algebra je $Cl(V, q) = \mathscr{T}(X)/\mathscr{I}$.

Ak má V signatúru (p, q), príslušnú Cliffordovu algebru budeme označovať $Cl_{p,q}$, lebo nás nezaujímajú rozdiely medzi kvadratickými priestormi, ktoré majú rovnakú signatúru.

Máme teda zobrazenia, kde $p : \mathscr{T}(V) \to \mathscr{T}(V)/\mathscr{I} \cong Cl_{p,q}$ je mapa projekcie a $i : V \hookrightarrow \mathscr{T}(V)$ je prirodzené vnorenie. Bude pre nás výhodné považovať V ako podmnožinu $\mathscr{T}(V)$.

$$\begin{tikzcd} \mathscr{T}(V) \arrow[r, "p"] & Cl(p,q) \\ V \arrow[u, hook] & \end{tikzcd}$$

Všimnime si, že Cliffordová algebra je algebra s jednotkou. Je to preto, lebo tenzorová algebra $\mathscr{T}(V)$ je tak skonštruovaná, že jednotku má, a vlastnosť mať jednotku sa zachováva na faktorové algebry. Naviac platí, že vektorový priestor skalárov v $Cl(V, q)$ (t.j. $\mathbb{R}1$) je *vložením* vektorového priestoru skalárov v $\mathscr{T}(V)$. Inými slovami tento diagram komutuje

$$\begin{tikzcd} \mathscr{T}(V) \arrow[r, "p"] & Cl(p,q) \\ \mathbb{R} \arrow[u, hook] \arrow[r, leftrightarrow, "id"] & \mathbb{R}1 \arrow[u, hook] \end{tikzcd}$$

Zavedieme ešte ďalšie zjednodušenie značenia a prvok $p(v) \in Cl_{p,q}$ pre $v \in V$ budeme označovať iba ako v. Je to dobrá definícia, lebo $p \circ i : V \to Cl\ (V, q)$ je injekcia t.j. žiadny vektor $v \in V$ neleží v ideáli $\mathscr{I}$.

Rôzne identifikácie priestorov, ktoré sme tu a v predošlých častiach obhajovali, zhrnieme nasledujúcim diagramom.

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{T}(V) \arrow[r, "p"] & Cl(p,q) \\
\mathbb{R} \arrow[u, hook] \arrow[ur, hook] & V \arrow[u, hook] \arrow[ul, hook']
\end{tikzcd}$$

V nasledujúcom texte nás budú zaujímať nasledujúce čísla: kvadratická norma vektora $v \in V$, $q(v)$ a druhá mocnina obrazu v v Cliffordovej algebre $v \cdot v \in Cl(V,q)$. Tieto dva prvky budú vždy skaláre s opačným znamienkom. Naozaj, v $Cl(V,q)$ je $v \cdot v + 1 \cdot q(v) = 0$, teda $q(v) = -v \cdot v$.

2.2 Lemy o mapách

Lema 2.2.1 (Univerzálna vlastnosť faktorového okruhu)**.** *Majme* $\mathbb{R}$*-algebry* $\mathscr{A}, \mathscr{B}$*, ideál* $\mathscr{I}$ *algebry* $\mathscr{A}$*. Majme* $f : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ *lineárnu funkciu, takú že* $f \restriction \mathscr{I} = 0$*. Potom existuje jediná funkcia* $f' : {}^{\mathscr{A}}\!/_{\mathscr{I}} \to \mathscr{B}$ *taká, že diagram*

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{I} \arrow[r, hook, "i"] \arrow[dr, "f\restriction\mathscr{I}"'] & \mathscr{A} \arrow[r, "p"] \arrow[d, "f"] & {}^{\mathscr{A}}\!/_{\mathscr{I}} \arrow[dl, dotted, "f'"] \\
& \mathscr{B} &
\end{tikzcd}$$

komutuje.

Dôkaz. Veľmi podobnú lemu sme tu už ukazovali, viď poznámka pod lemou 1.6.1. $\square$

Lema 2.2.2. *Majme nejakú reálnu algebru* $\mathscr{A}$ *a lineárnu funkciu* $f : V \to \mathscr{A}$*. Potom sa táto mapa dá jednoznačne rozšíriť na homomorfizmus algebier* $f' : \mathscr{T}(V) \to \mathscr{A}$*.*

Dôkaz. Z podmienky $f'(x \otimes y) = f'(x)f'(y)$ homomorfizmu algebier máme, že nasledujúca rovnosť musí platiť $f'(v_1 \otimes v_2 \otimes \ldots \otimes v_k) = f(v_1)f(v_2)\ldots f(v_k)$. Keď f' rozšírime lineárne, už ho máme definované na celom $\mathscr{T}(V)$. Toto dokazuje *jednoznačnosť*.

Pre *existenciu* sa musíme presvedčiť, že takto definované f' je naozaj homomorfizmus algebier. Prvá ($\phi(rx) = r\phi(x)$) a druhá ($\phi(x+y) = \phi(x) + \phi(y)$) vlastnosť je zrejmá, lebo f' bola rozšírená lineárne a tenzorový súčin je multilineárny.

Funkcia f' bola definovaná tak, aby splnila tretiu vlastnosť ($\phi(xy) = \phi(x)\phi(y)$). $\square$

Lema 2.2.3. *[9, str.8, veta 1.1] Majme kvadratický priestor* V *a nejakú asociatívnu* $\mathbb{R}$*-algebru* $\mathscr{A}$ *s jednotkou . Potom každá lineárna funkcia* $f : V \to \mathscr{A}$*, taká že*

$$f(v) \cdot f(v) = -q(v) \cdot 1$$

sa dá jednoznačne rozšíriť na homomorfizmus algebier $\tilde{f} : \mathrm{Cl}(V,q) \to \mathscr{A}$*.*

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{T}(V) \arrow[r, "p"] & Cl \arrow[d, dotted, "\tilde{f}"] \\
V \arrow[u, hook, "i"] \arrow[r, "f"] & \mathscr{A}
\end{tikzcd}$$

Dôkaz. Z predošlej lemy máme lineárne, homomorfné rozšírenie $f' : \mathscr{T} \to \mathscr{A}$. Keďže je Cliffordova algebra definovaná ako faktorový objekt, môžeme sa snažiť aplikovať lemu 2.2.1. Potrebujeme, aby $f' \restriction \mathscr{I} = 0$. Keďže je f' homomorfizmus, stačí nám overiť jeho správanie na generátoroch ideálu $\mathscr{I}$. A naozaj pre ľubovoľný prvok generátora $\mathscr{I}$, $x \otimes x + 1 \cdot q(x)$ je $f'(x \otimes x + 1 \cdot q(x)) = f'(x)f'(x) - 1 \cdot q(x) = 0$. Tým je veta dokázaná. □

Overovanie podmienky z predošlej lemy:

$$f(v) \cdot f(v) = -q(v) \cdot 1 \quad \forall v \in V$$

si môžeme značne uľahčiť tak, že ju overíme iba pre vektory e z ortonormálnej bázy V za podmienky antikomutácie* obrazov ortonormálnej bázy V. Napríklad ak V má ortonormálnu bázu $\{e_1, e_2\}$ a predpokladáme, že $f(e) \cdot f(e) = -q(e) \cdot 1$, $e = e_1, e_2$, potom pre ľubovoľný $v \in V, v = \alpha e_1 + \beta e_2$ máme:

$$\begin{aligned}
f(v) \cdot f(v) = \\
&= f(\alpha_1 e_1 + \beta e_2) \cdot f(\alpha e_1 + \beta e_2) = \\
&= \alpha^2 f(e_1) \cdot f(e_1) + \alpha\beta f(e_1) \cdot f(e_2) + \alpha\beta f(e_2) \cdot f(e_1) + \beta^2 f(e_2) \cdot f(e_2) = \\
&= \alpha^2 f(e_1) \cdot f(e_1) + \alpha\beta f(e_1) \cdot f(e_2) - \alpha\beta f(e_1) \cdot f(e_2) + \beta^2 f(e_2) \cdot f(e_2) = \\
&= \alpha^2 f(e_1) \cdot f(e_1) + \beta^2 f(e_2) \cdot f(e_2) = \\
&= -(\alpha^2 q(e_1) + \beta^2 q(e_2)) = \\
&= -\langle \alpha e_1 + \beta e_2, \alpha e_1 + \beta e_2 \rangle = \qquad \text{Používam ortonormálnosť} \\
&= -q(v)
\end{aligned}$$

Toto uvažovanie zhrnieme nasledovne

Lema 2.2.4. *Pre V kvadratický priestor s ortonormálnou bázou $\{e_1, \dots, e_n\}$ a pre lineárnu funkciu $f : V \to \mathscr{A}$ a antikomutujúcu množinu $Im_f(\{e_1, \dots, e_n\})$ platí*

$$f(e_i) \cdot f(e_i) = -q(e_i) \cdot 1 \, \forall e_i \in \{e_1, \dots, e_n\} \iff f(v) \cdot f(v) = -q(v) \cdot 1 \, \forall v \in V$$

Dôkaz. Postupujeme indukciou na veľkosť bázy

1.krok Pre $n = 1$ to triviálne platí.

2.krok Majme $n-$rozmerný kvadratický priestor V a jeden prvok jeho ortonormálnej bázy $e_1 \in \{e_1, \dots, e_n\}$. Potom V vieme napísať ako $V = \mathbb{R}e_1 \oplus V'$, kde V' je

*$x \cdot y = -y \cdot x$

$(n-1)-$rozmerný podpriestor V generovaný zvyškom ortonormálnej bázy V. Špeciálne teda platí, že $e_1 \perp V'$. Použijeme indukčný predpoklad, teda

$$f(e_i) \cdot f(e_i) = -q(e_i) \cdot 1 \,\forall e_i \in \{e_2, \dots, e_n\} \iff f(v) \cdot f(v) = -q(v) \cdot 1 \,\forall v \in V'$$

Ďalej sa postupuje úplne rovnako ako v texte hore. Ľubovoľné $v \in V$ napíšeme ako $v = \alpha e_1 + \beta x', \quad x' \in V'$ a opakujeme tie isté kroky. $\square$

Naším ďalším cieľom je úplne klasifikovať reálne Cliffordove algebry nad konečnorozmerným vektorovým priestorom. Chceli by sme mať aparát na to, že si tipneme nejakú známu algebru ako kandidáta a ukážeme, že je to naozaj Cliffordová algebra, ktorú hľadáme. Teda keď bude mapa $\tilde{f}$ z predošlej lemy izomorfizmus, máme vyhraté. Zišlo by sa nám poznať dimenzie Cliffordových algebier.

Tvrdenie 2.2.5. *[9, str. 10, 1.3] Majme Cliffordovú algebru* $\mathrm{Cl}_{p,q}$ *kvadratického priestoru* $\mathbb{R}^{p,q}$*. Potom máme izomorfizmus vektorových priestorov* $\mathrm{Cl}_{p,q} \cong \Lambda\mathbb{R}^{p,q}$*.*

Dôkaz. Báza $Cl_{p,q}$ bude úplne rovnaká ako báza $\Lambda\mathbb{R}^{p,q}$ z rovnakých dôvodov, aké boli spomenuté v časti 1.7. $\square$

Dôsledok 2.2.6. *Máme, že* $\dim \mathrm{Cl}_{p,q} = 2^{p+q}$*.*

Dôkaz. $\dim Cl_{p,q} = \dim \Lambda\mathbb{R}^{p,q} = 2^{p+q}$. $\square$

2.3 Klasifikácia Cliffordových algebier

Ako prvé triviálne pozorovanie je, že $Cl_{0,0} \cong \mathbb{R}$, keď položíme mapu $f \equiv 0$ a nahliadneme, že $\dim Cl_{0,0} = 1$.

Budeme vypĺňať nasledujúcu tabuľku pre rôzne signatúry.

(p,q)	0	1	2	3	4	5	6	7
0	$\mathbb{R}$							
1								
2								
3								
4								
5								
6								
7								

Zoberme si kvadratický priestor $\mathbb{R}^{1,0}$ (ktorý je izomorfný s klasickým $\mathbb{R}$). Chápme $\mathbb{R}^{1,0}$ ako vektorový priestor nad $\mathbb{R}$ s bázou $\{e_1\}$, s bežným skalárnym súčinom (teda $\langle x, y\rangle = xy$), resp. normou $q(e_1) = 1$. Teraz by sme chceli nájsť jeho Cliffordovu algebru. Podľa dôsledku 2.2.6 má jej dimenzia byť 2. Keď chceme využiť lemu 2.2.3, potrebujeme mapu $f : \mathbb{R} \to Cl_{1,0}$ takú, aby $f(e_1)f(e_1) = -q(e_1) \cdot 1 = -1$. Toto by nám mohlo napovedať, že naším kandidátom na Cliffordovu algebru je práve algebra komplexných čísel $\mathbb{C}$, ktorú generuje množina $\{1, i\}$ ako vektorový priestor. Definujme $f(e_1) = i$ a lineárne rozšírme. Platí $f(e_1)f(e_1) = -1 = -q(e_1) \cdot 1$, teda mapa $\tilde{f}$ existuje práve vďaka leme 2.2.3.

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{T}(\mathbb{R}) \arrow[r, "p"] & Cl(1,0) \arrow[d, dotted, "\tilde{f}"] \\
\mathbb{R} \arrow[u, hook, "i"] \arrow[r, "f"] & \mathbb{C}
\end{tikzcd}$$

Keďže $\mathbb{C} \ni i \in Im(f)$, tak $i \in Im(\tilde{f})$. Oba generátory $\mathbb{C}$ sú v obraze $\tilde{f}$, teda, $\tilde{f}$ je surjekcia. Ale dimenzia $\mathbb{C}$ je 2, tak ako aj hľadanej Cliffordovej algebry, takže $\tilde{f}$ je naozaj izomorfizmus a $Cl(\mathbb{R}^{1,0}, q) \cong \mathbb{C}$.

Lema 2.3.1. *[9, str. 25] Platia nasledujúce izomorfizmy algebier:*

a) $\mathrm{Cl}(0,0) \cong \mathbb{R}$

b) $\mathrm{Cl}(1,0) \cong \mathbb{C}$

c) $\mathrm{Cl}(0,1) \cong \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$

d) $\mathrm{Cl}(2,0) \cong \mathbb{H}$

Dôkaz. a) Vyriešené

b) Vyriešené

c) Náš priestor je $\mathbb{R}^{0,1}$, s jedným generátorom $\{e\}$, $q(e) = -1$.

Najprv sa presvedčíme, že element $(1, -1) \in \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$ generuje $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$ ako algebru.

$$(1, -1) \cdot (1, -1) = (1, 1)$$

Zoberme si ľubovoľné $(a, b) \in \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$. Potom

$$\frac{a+b}{2} \cdot (1, 1) + \frac{a-b}{2} \cdot (1, -1) = (a, b)$$

Zjavne je dimenzia $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R} = 2$.

Predošlá úvaha nám napovedala, ako by mala vyzerať funkcia f v nasledujúcom diagrame:

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{T}(\mathbb{R}^{0,1}) \arrow[r, "p"] & Cl_{0,1} \arrow[d, dotted, "\tilde{f}"] \\
\mathbb{R}^{0,1} \arrow[u, hook, "i"] \arrow[r, "f"] & \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}
\end{tikzcd}$$

Kde

$$f : \mathbb{R}^{0,1} \to \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$$
$$e \mapsto (1, -1)$$

a funkciu f rozšírime lineárne.

Teraz treba skontrolovať podmienku z lemy 2.2.3, teda že naozaj $f(e) \cdot f(e) = (1, 1) = -q(e) \cdot (1, 1)$.

Aby bola mapa $\tilde{f}$ izomorfizmom algebier, stačí len porovnať dimenzie. $\dim \mathbb{R}\oplus\mathbb{R} = 2 = 2^1 = \dim Cl_{0,1}$.

d) Zoberme si $i, j \in \mathbb{H}$. Keďže $-i^2 = 1$ a $i \cdot j = k$ a $\{1, i, j, k\}$ generujú $\mathbb{H}$ ako vektorový priestor, tak $\{i, j\}$ generujú kvaternióny ako algebru.

Zoberme $\{e_1, e_2\}$ ortonormálnu bázu $\mathbb{R}^{2,0}$.

$$\begin{tikzcd} \mathscr{T}(\mathbb{R}^{2,0}) \arrow[r, "p"] & Cl_{2,0} \arrow[d, dotted, "\tilde{f}"] \\ \mathbb{R}^{2,0} \arrow[u, hook, "i"] \arrow[r, "f"] & \mathbb{H} \end{tikzcd}$$

Kde

$$f : \mathbb{R}^{2,0} \to \mathbb{H}$$
$$e_1 \mapsto i$$
$$e_2 \mapsto j$$

a zvyšok rozšírime lineárne.

Skontrolujeme podmienky lemy 2.2.3. Podľa pozorovania z 2.2.4 nám stačí overiť nasledujúce fakty:

- $f(e_1) \cdot f(e_1) = i \cdot i = -1 = -1 \cdot q(e_1)$
- $f(e_2) \cdot f(e_2) = j \cdot j = -1 = -1 \cdot q(e_2)$
- $f(e_1) \cdot f(e_2) = i \cdot j = -j \cdot i = -f(e_2) \cdot f(e_1)$

Dimenzie $Cl_{2,0}$ a $\mathbb{H}$ sú rovnako 4.

□

Teraz naša tabuľka vyzerá takto:

My sme si sľúbili úplnú klasifikáciu, takže teraz uvedieme vety, ktoré určia Cliffordovu algebru pre nejakú signatúru ako tenzorový súčin iných Cliffordových algebier.

(p,q)	0	1	2	3	4	5	6	7
0	$\mathbb{R}$	$\mathbb{C}$	$\mathbb{H}$					
1	$\mathbb{R}\oplus\mathbb{R}$							
2								
3								
4								
5								
6								
7								

Lema 2.3.2. *[9, str.25, 4.1] Platí, že*

a) $\mathrm{Cl}_{n,0} \otimes \mathrm{Cl}_{0,2} = \mathrm{Cl}_{0,n+2} \quad n \geq 0$

b) $\mathrm{Cl}_{0,n} \otimes \mathrm{Cl}_{2,0} = \mathrm{Cl}_{n+2,0} \quad n \geq 0$

c) $\mathrm{Cl}_{r,s} \otimes \mathrm{Cl}_{1,1} = \mathrm{Cl}_{r+1,s+1} \quad r, s \geq 0$

Dôkaz. Ako vždy budeme využívať lemu 2.2.3 spolu s 2.2.4.

a) Zoberme $\mathbb{R}^{0,n+2}$ a jeho ortonormálnu bázu $\{e_1, \ldots, e_{n+2}\}$. Platí $q(e_i) = -1 \quad$ pre $i = 1, \ldots, n+2$.

$Cl_{n,0}$ je Cliffordova algebra $\mathbb{R}^{n,0}$, teda zoberme ortonormálnu bázu vektorového priestoru $\mathbb{R}^{n,0}$: $\{h_1, \ldots, h_n\}$. Platí $q(h_i) = 1$ a pamätáme na to, že pre h_i, chápaného ako $h_i \in Cl_{n,0}$ máme $h_i \cdot h_i = -1 \quad$ pre $i = 1, \ldots, n$. Podobne máme ortonormálnu bázu $\mathbb{R}^{0,2}$:$\{g_1, g_2\}$, kde platí$q(g_1) = q(g_2) = -1$, $g_1 \cdot g_1 = g_2 \cdot g_2 = 1$.

Máme diagram

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{T}(\mathbb{R}^{n+2,0}) \arrow[r, "p"] & Cl_{n+2,0} \arrow[d, dotted, "\tilde{f}"] \\
\mathbb{R}^{n+2,0} \arrow[u, hook, "i"] \arrow[r, "f"] & Cl_{n,0} \otimes Cl_{0,2}
\end{tikzcd}$$

kde

$$f(e_i) = \begin{cases} h_i \otimes g_1 g_2 & i = 1, \ldots, n \\ 1 \otimes g_{i-n} & i = n+1, n+2 \end{cases}$$

a rozšírené lineárne.

Potrebujeme overiť nasledujúce fakty:

- Pre $i = 1, \ldots, n$,

$$\begin{aligned} f(e_i) \cdot f(e_i) = & \\ & = (h_i \otimes g_1 \cdot g_2) \cdot (h_i \otimes g_1 \cdot g_2) = \\ & = h_i \cdot h_i \otimes g_1 \cdot g_2 \cdot g_1 \cdot g_2 = \\ & = -1 \otimes g_1 \cdot g_2 \cdot g_1 \cdot g_2 = \\ & = 1 \otimes g_1 \cdot g_1 \cdot g_2 \cdot g_2 = \\ & = 1 \otimes 1 = \\ & = -q(e_1) \cdot (1 \otimes 1) \end{aligned}$$

- Pre $i = n + 1$ alebo $i = n + 2$

$$\begin{aligned} f(e_i) \cdot f(e_i) = & \\ & = (1 \otimes g_{i-n}) \cdot (1 \otimes g_{i-n}) = \\ & = 1 \otimes g_{i-n} \cdot g_{i-n} = \\ & = 1 \otimes 1 = \\ & = -q(e_1) \cdot (1 \otimes 1) \end{aligned}$$

- *(Antikomutácia č.1)* pre $i, j = 1, \ldots, n$, $i \neq j$

$$\begin{aligned} f(e_i) \cdot f(e_j) = & \\ & = (h_i \otimes g_1 \cdot g_2) \cdot (h_j \otimes g_1 \cdot g_2) = \\ & = h_i \cdot h_j \otimes g_1 \cdot g_2 \cdot g_1 \cdot g_2 = \\ & = -h_j \cdot h_i \otimes g_1 \cdot g_2 \cdot g_1 \cdot g_2 = \\ & = -(h_j \otimes g_1 \cdot g_2) \cdot (h_i \otimes g_1 \cdot g_2) = \\ & = -f(e_j) \cdot f(e_i) = \end{aligned}$$

- *(Antikomutácia č.2)* pre $i = 1, \ldots, n$, $j = n + 1$ alebo $j = n + 2$

$$\begin{aligned} f(e_i) \cdot f(e_j) = & \\ & = (h_i \otimes g_1 \cdot g_2) \cdot (1 \otimes g_{i-n}) = \\ & = h_i \otimes g_1 \cdot g_2 \cdot g_{i-n} = \\ & = ch_j \cdot h_i \otimes g_1 \cdot g_{i-n} \cdot g_2 = \\ & = -h_j \cdot h_i \otimes g_{i-n} \cdot g_1 \cdot g_2 = \\ & = -f(e_j) \cdot f(e_i) = \end{aligned}$$

Tu som použila konštantu $c = \pm 1$ kvôli stručnosti, ako g_{i-n} cestuje doľava, na dva skoky, iba raz vymení znamienko, lebo raz sa určite mení sám zo sebou.

- *(Antikomutácia č.3)* Bez ujmy na všeobecnosti $i = n+1$, $j = n+2$

$$\begin{aligned} f(e_{n+1}) \cdot f(e_{n+2}) = & \\ & = (1 \otimes g_1) \cdot (1 \otimes g_2) = \\ & = 1 \otimes g_1 \cdot g_2 = \\ & = -1 \otimes g_2 \cdot g_1 = \\ & = -f(e_{n+2}) \cdot f(e_{n+1}) = \end{aligned}$$

Dimenzia $Cl_{n,0} \otimes Cl_{0,2}$ je $2^n 2^2 = 2^{n+2}$, čo je dimenzia $Cl_{0,n+2}$.

Teraz ale nie je hneď jasné, že obraz f je nejaká množina generátorov. Zoberme si nejaký prvok z bázy $Cl_{n,0} \otimes Cl_{0,2}$.

$$h_i \otimes g_j \in Cl_{n,0} \otimes Cl_{0,2}$$

- Ak $j = 1$

$$\begin{aligned} f(h_i) \cdot f(g_2) = & \\ & = (h_i \otimes g_1 \cdot g_2) \cdot (1 \otimes g_2) = \\ & = h_i \otimes g_1 \cdot g_2 \cdot g_2 = \\ & = h_i \otimes g_1 \end{aligned}$$

- Ak $j = 2$

$$\begin{aligned} -f(h_i) \cdot f(g_1) = & \\ & = -(h_i \otimes g_1 \cdot g_2) \cdot (1 \otimes g_1) = \\ & = -h_i \otimes g_1 \cdot g_2 \cdot g_1 = \\ & = h_i \otimes g_1 \cdot g_1 \cdot g_2 = \\ & = h_i \otimes g_2 \end{aligned}$$

b) Dôkaz tejto časti bude vyzerať rovnako, ale spravíme ho aj tak, lebo sa budeme o toto tvrdenie dosť opierať.

Máme:

- Ortonormálnu bázu $\mathbb{R}^{n+2,0}$, $\{e_1, \ldots, e_{n+2}\}$. Platí $q(e_i) = 1$, pre $i = 1, \ldots, n+2$.
- Ortonormálnu bázu $\mathbb{R}^{0,n}$, $\{h_1, \ldots, h_n\}$. Platí $q(h_i) = -1$ a $h_i \cdot h_i = -1$ pre $i = 1, \ldots, n$.
- Ortonormálnu bázu $\mathbb{R}^{2,0}$, $\{g_1, g_2\}$. Platí $q(g_1) = q(g_2) = 1$, $g_1 \cdot g_1 = g_2 \cdot g_2 = -1$.

Máme diagram

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{T}(\mathbb{R}^{n+2,0}) \arrow[r, "p"] & Cl_{n+2,0} \arrow[d, dotted, "\tilde{f}"] \\
\mathbb{R}^{n+2,0} \arrow[u, hook, "i"] \arrow[r, "f"] & Cl_{0,n} \otimes Cl_{2,0}
\end{tikzcd}$$

kde

$$f(e_i) = \begin{cases} h_i \otimes g_1 g_2 & i = 1, \dots, n \\ 1 \otimes g_{i-n} & i = n+1, n+2 \end{cases}$$

a rozšírené lineárne.

Potrebujeme overiť také fakty ako v predošlej časti.

- Pre $i = 1, \dots, n$,

$$\begin{aligned} f(e_i) \cdot f(e_i) = \\ &= (h_i \otimes g_1 \cdot g_2) \cdot (h_i \otimes g_1 \cdot g_2) = \\ &= h_i \cdot h_i \otimes g_1 \cdot g_2 \cdot g_1 \cdot g_2 = \\ &= 1 \otimes g_1 \cdot g_2 \cdot g_1 \cdot g_2 = \\ &= -1 \otimes g_1 \cdot g_1 \cdot g_2 \cdot g_2 = \\ &= -1 \otimes 1 = \\ &= -q(e_1) \cdot (1 \otimes 1) \end{aligned}$$

- Pre $i = n+1$ alebo $i = n+2$

$$\begin{aligned} f(e_i) \cdot f(e_i) = \\ &= (1 \otimes g_{i-n}) \cdot (1 \otimes g_{i-n}) = \\ &= 1 \otimes g_{i-n} \cdot g_{i-n} = \\ &= -1 \otimes 1 = \\ &= -q(e_i) \cdot (1 \otimes 1) \end{aligned}$$

- *(Antikomutácia č.1)*pre $i, j = 1, \dots, n$, $i \neq j$

$$\begin{aligned} f(e_i) \cdot f(e_j) = \\ &= (h_i \otimes g_1 \cdot g_2) \cdot (h_j \otimes g_1 \cdot g_2) = \\ &= h_i \cdot h_j \otimes g_1 \cdot g_2 \cdot g_1 \cdot g_2 = \\ &= -h_j \cdot h_i \otimes g_1 \cdot g_2 \cdot g_1 \cdot g_2 = \\ &= -(h_j \otimes g_1 \cdot g_2) \cdot (h_i \otimes g_1 \cdot g_2) = \\ &= -f(e_j) \cdot f(e_i) = \end{aligned}$$

- *(Antikomutácia č.2)* pre $i = 1, \ldots, n$, $j = n+1$ alebo $j = n+2$

$$\begin{aligned} f(e_i) \cdot f(e_j) = \\ &= (h_i \otimes g_1 \cdot g_2) \cdot (1 \otimes g_{i-n}) = \\ &= h_i \otimes g_1 \cdot g_2 \cdot g_{i-n} = \\ &= ch_j \cdot h_i \otimes g_1 \cdot g_{i-n} \cdot g_2 = \\ &= -h_j \cdot h_i \otimes g_{i-n} \cdot g_1 \cdot g_2 = \\ &= -f(e_j) \cdot f(e_i) = \end{aligned}$$

  S rovnakou konštantou ako minule, $c = \pm 1$.

- *(Antikomutácia č.3)* Bez ujmy na všeobecnosti $i = n+1$, $j = n+2$

$$\begin{aligned} f(e_{n+1}) \cdot f(e_{n+2}) = \\ &= (1 \otimes g_1) \cdot (1 \otimes g_2) = \\ &= 1 \otimes g_1 \cdot g_2 = \\ &= -1 \otimes g_2 \cdot g_1 = \\ &= -f(e_{n+2}) \cdot f(e_{n+1}) = \end{aligned}$$

Dimenzie sa zase zhodujú.
Teraz zase chceme ukázať, že obraz f vygeneruje celé $Cl_{0,n} \otimes Cl_{2,0}$.
Zoberme:

$$h_i \otimes g_j \in Cl_{0,n} \otimes Cl_{2,0}$$

- Ak $j = 1$

$$\begin{aligned} -f(h_i) \cdot f(g_2) = \\ &= -(h_i \otimes g_1 \cdot g_2) \cdot (1 \otimes g_2) = \\ &= -h_i \otimes g_1 \cdot g_2 \cdot g_2 = \\ &= h_i \otimes g_1 \end{aligned}$$

- Ak $j = 2$

$$\begin{aligned} f(h_i) \cdot f(g_1) = \\ &= (h_i \otimes g_1 \cdot g_2) \cdot (1 \otimes g_1) = \\ &= h_i \otimes g_1 \cdot g_2 \cdot g_1 = \\ &= -h_i \otimes g_1 \cdot g_1 \cdot g_2 = \\ &= h_i \otimes g_2 \end{aligned}$$

c) Máme:

- Ortonormálnu bázu $\mathbb{R}^{r+1,s+1}$, $\{e_1, \dots, e_{r+1}, \epsilon_1, \dots, \epsilon_{s+1}\}$. Platí $q(e_i) = -1$, pre $i = 1, \dots, r+1$ a $q(\epsilon_i) = 1$, pre $i = 1, \dots, s+1$.
- Ortonormálnu bázu $\mathbb{R}^{r,s}$, $\{h_1, \dots, h_r, \theta_1, \dots, \theta_s\}$. Platí $q(h_i) = -1$, $h_i \cdot h_i = 1$ pre $i = 1, \dots, r$ a $q(\epsilon_i) = 1, \epsilon_i \cdot \epsilon_i = -1$ pre $i = 1, \dots, s$.
- Ortonormálnu bázu $\mathbb{R}^{1,1}$, $\{g, \gamma\}$. Platí $q(g) = -1$, $g \cdot g = 1$ a $q(\gamma) = 1$, $\gamma \cdot \gamma = -1$.

Máme diagram

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{T}(\mathbb{R}^{r+1,s+1}) \arrow[r, "p"] & Cl_{r+1,s+1} \arrow[d, dotted, "\tilde{f}"] \\
\mathbb{R}^{r+1,s+1} \arrow[u, hook, "i"] \arrow[r, "f"] & Cl_{r,s} \otimes Cl_{1,1}
\end{tikzcd}$$

kde

$$f(e_i) = \begin{cases} h_i \otimes g \cdot \gamma & i = 1, \dots, r \\ 1 \otimes g & i = r+1 \end{cases}$$

$$f(\epsilon_i) = \begin{cases} \theta_i \otimes g \cdot \gamma & i = 1, \dots, s \\ 1 \otimes \gamma & i = s+1 \end{cases}$$

a rozšírené lineárne.

Potrebujeme overiť také fakty ako v predošlých častiach.

- Pre $i = 1, \dots, r$ a e_i

$$\begin{aligned}
f(e_i) \cdot f(e_i) = & \\
&= (h_i \otimes g \cdot \gamma) \cdot (h_i \otimes g \cdot \gamma) = \\
&= h_i \cdot h_i \otimes g \cdot \gamma \cdot g \cdot \gamma = \\
&= -1 \otimes g \cdot \gamma \cdot g \cdot \gamma = \\
&= 1 \otimes g \cdot g \cdot \gamma \cdot \gamma = \\
&= -1 \otimes 1 = \\
&= -q(e_1) \cdot (1 \otimes 1)
\end{aligned}$$

- Pre $i = r+1$ a e_i

$$\begin{aligned}
f(e_{r+1}) \cdot f(e_{r+1}) = & \\
&= (1 \otimes g) \cdot (1 \otimes g) = \\
&= 1 \otimes g \cdot g = \\
&= -1 \otimes 1 = \\
&= -q(e_{r+1}) \cdot (1 \otimes 1)
\end{aligned}$$

- Pre $i = 1, \ldots, s$ a ϵ_i

$$\begin{aligned} f(\epsilon_i) \cdot f(\epsilon_i) = \\ &= (\theta_i \otimes g \cdot \gamma) \cdot (\theta_i \otimes g \cdot \gamma) = \\ &= \theta_i \cdot \theta_i \otimes g \cdot \gamma \cdot g \cdot \gamma = \\ &= 1 \otimes g \cdot \gamma \cdot g \cdot \gamma = \\ &= -1 \otimes g \cdot g \cdot \gamma \cdot \gamma = \\ &= 1 \otimes 1 = \\ &= -q(\epsilon_i) \cdot (1 \otimes 1) \end{aligned}$$

- Pre $i = s + 1$ a ϵ_i

$$\begin{aligned} f(\epsilon_{s+1}) \cdot f(\epsilon_{s+1}) = \\ &= (1 \otimes \gamma) \cdot (1 \otimes \gamma) = \\ &= 1 \otimes \gamma \cdot \gamma = \\ &= 1 \otimes 1 = \\ &= -q(\epsilon_{s+1}) \cdot (1 \otimes 1) \end{aligned}$$

Teraz by sme mali uviesť šesť antikomutačných dôkazov, skúsime to trochu skrátiť

- *(Antikomutácia č.1)* $x, y \in \{e_1, \ldots, e_r, \epsilon_1, \ldots, \epsilon_s\}$, $x \neq y$, pre vhodné $z \neq z' \in \{h_1, \ldots, h_r, \theta_1, \ldots, \theta_s\}$

$$\begin{aligned} f(x) \cdot f(y) = \\ &= (z \otimes g \cdot \gamma) \cdot (z' \otimes g \cdot \gamma) = \\ &= z \cdot z' \otimes g \cdot \gamma \cdot g \cdot \gamma = \\ &= -z' \cdot z \otimes g \cdot \gamma \cdot g \cdot \gamma = \\ &= -f(y) \cdot f(x) \end{aligned}$$

- *(Antikomutácia č.2)* Pre e_{r+1}, ϵ_{s+1}

$$\begin{aligned} f(e_{r+1}) \cdot f(\epsilon_{s+1}) = \\ &= (1 \otimes g) \cdot (1 \otimes \gamma) = \\ &= 1 \otimes g \cdot \gamma = \\ &= -1 \otimes \gamma \cdot g = \\ &= -f(\epsilon_{s+1}) \cdot f(e_{r+1}) \end{aligned}$$

- *(Antikomutácia č.3)* Pre $x \in \{e_1, \ldots, e_r, \epsilon_1, \ldots, \epsilon_s\}$, vhodné prislúchajúce

$z \in \{h_1, \dots, h_r, \theta_1, \dots, \theta_s\}$ a $y \in \{e_{r+1}, \epsilon_{s+1}\}$ s prislúchajúcim $w \in \{g, \gamma\}$

$$\begin{aligned} f(x) \cdot f(y) = & \\ & = (z \otimes g \cdot \gamma) \cdot (1 \otimes w) = \\ & = z \otimes g \cdot \gamma \cdot w = \\ & = c(z \otimes g \cdot w \cdot \gamma) = \\ & = -z \otimes w \cdot g \cdot \gamma = \\ & = -f(y) \cdot f(x) = \end{aligned}$$

Čo sa týka dimenzií, $\dim Cl_{r,s} \otimes Cl_{1,1} = 2^{r+s}2^2 = 2^{r+s+2} = \dim Cl_{r+1,s+1}$

To, že obraz f generuje celé $Cl_{r,s} \otimes Cl_{1,1}$ ukazujú nasledujúce jednoduché rovnosti

$$h_i \otimes g = f(e_i) \cdot f(\epsilon_{s+1})$$
$$h_i \otimes \gamma = f(e_i) \cdot f(e_{r+1})$$
$$\theta_i \otimes g = f(\epsilon_i) \cdot f(\epsilon_{s+1})$$
$$\theta_i \otimes \gamma = f(\epsilon_i) \cdot f(e_{r+1})$$

□

Teraz máme vynikajúce nástroje na dopĺňanie tabuľky. Budeme využívať celý obsah časti 1.6, kde sme ukázali rôzne izomorfizmy tenzorových súčinov maticových algebier. Ako prvý bod, vyplníme políčka $(p, 0)$ a $(0, q)$ pomocou vlastností a), b):

(p,q)	0	1	2	3	4	5	6	7
0	$\mathbb{R}$	$\mathbb{C}$	$\mathbb{H}$	$\mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$	$\mathbb{H}(2)$	$\mathbb{C}(4)$	$\mathbb{R}(8)$	$\mathbb{R}(8) \oplus \mathbb{R}(8)$
1	$\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$							
2	$\mathbb{R}(2)$							
3	$\mathbb{C}(2)$							
4	$\mathbb{H}(2)$							
5	$\mathbb{H}(2) \oplus \mathbb{H}(2)$							
6	$\mathbb{H}(4)$							
7	$\mathbb{C}(8)$							

A potom pomocou vlastnosti c) zvyšok.

(p,q)	0	1	2	3	4	5	6	7
0	$\mathbb{R}$	$\mathbb{C}$	$\mathbb{H}$	$\mathbb{H}\oplus\mathbb{H}$	$\mathbb{H}(2)$	$\mathbb{C}(4)$	$\mathbb{R}(8)$	$\mathbb{R}(8)\oplus\mathbb{R}(8)$
1	$\mathbb{R}\quad\oplus\mathbb{R}$	$\mathbb{R}(2)$	$\mathbb{C}(2)$	$\mathbb{H}(2)$	$\mathbb{H}(2)\oplus\mathbb{H}(2)$	$\mathbb{H}(4)$	$\mathbb{C}(8)$	$\mathbb{R}(16)$
2	$\mathbb{R}(2)$	$\mathbb{R}(2)\oplus\mathbb{R}(2)$	$\mathbb{R}(4)$	$\mathbb{C}(4)$	$\mathbb{H}(4)$	$\mathbb{H}(4)\oplus\mathbb{H}(4)$	$\mathbb{H}(8)$	$\mathbb{C}(16)$
3	$\mathbb{C}(2)$	$\mathbb{R}(4)$	$\mathbb{R}(4)\oplus\mathbb{R}(4)$	$\mathbb{R}(8)$	$\mathbb{C}(8)$	$\mathbb{H}(8)$	$\mathbb{H}(8)\oplus\mathbb{H}(8)$	$\mathbb{H}(16)$
4	$\mathbb{H}(2)$	$\mathbb{C}(4)$	$\mathbb{R}(8)$	$\mathbb{R}(8)\oplus\mathbb{R}(8)$	$\mathbb{R}(16)$	$\mathbb{C}(16)$	$\mathbb{H}(16)$	$\mathbb{H}(16)\oplus\mathbb{H}(16)$
5	$\mathbb{H}(2)\oplus\mathbb{H}(2)$	$\mathbb{H}(4)$	$\mathbb{C}(8)$	$\mathbb{R}(16)$	$\mathbb{R}(16)\oplus\mathbb{R}(16)$	$\mathbb{R}(32)$	$\mathbb{C}(32)$	$\mathbb{H}(32)$
6	$\mathbb{H}(4)$	$\mathbb{H}(4)\oplus\mathbb{H}(4)$	$\mathbb{H}(8)$	$\mathbb{C}(16)$	$\mathbb{R}(32)$	$\mathbb{R}(32)\oplus\mathbb{R}(32)$	$\mathbb{R}(64)$	$\mathbb{C}(64)$
7	$\mathbb{C}(8)$	$\mathbb{H}(8)$	$\mathbb{H}(8)\oplus\mathbb{H}(8)$	$\mathbb{H}(16)$	$\mathbb{C}(32)$	$\mathbb{R}(64)$	$\mathbb{R}(64)\oplus\mathbb{R}(64)$	$\mathbb{R}(128)$

Obr. 2.1: Klasifikácia Cliffordových algebier

Nedoplnili sme naozaj celý „zvyšok“, ale ukazuje sa, že 8 stĺpcov a 8 riadkov je veľmi dobrá voľba vďaka nasledujúcim pozorovaniam.

Skúsme odvodiť nejakú peknú rekurentnú formulu pre $Cl_{(r,s)}$, Ak $(r \geq s)$ a $r - s \geq 8$.

$$\begin{aligned}
Cl_{r,s} &\cong \\
&\cong Cl_{r-s,0} \otimes (Cl_{1,1}^{\otimes s}) \cong \\
&\cong Cl_{r-s,0} \otimes \mathbb{R}(2^s) \cong \\
&\cong Cl_{0,r-s-2} \otimes Cl_{2,0} \otimes \mathbb{R}(2^s) \cong \\
&\cong Cl_{r-s-4,0} \otimes Cl_{0,2} \otimes Cl_{2,0} \otimes \mathbb{R}(2^s) \cong \\
&\cong Cl_{0,r-s-6} \otimes Cl_{0,2} \otimes Cl_{2,0} \otimes 2 \otimes \mathbb{R}(2^s) \cong \\
&\cong Cl_{r-s-8,0} \otimes Cl_{0,2}^{\otimes 2} \otimes Cl_{2,0}^{\otimes 2} \otimes \mathbb{R}(2^s) \cong \\
&\cong Cl_{r-s-8,0} \otimes \mathbb{R}(4) \otimes \mathbb{R}(4) \otimes \mathbb{R}(2^s) \cong \\
&\cong Cl_{r-s-8,0} \otimes \mathbb{R}(2^{s+4})
\end{aligned}$$

Zastavili sme sa tu, lebo keď spravíme druhý prípad $(r \leq s)$a $s - r \geq 8$ úplne rovnako zistíme, že:

$$Cl_{(r,s)} \cong Cl_{(0,s-r-8)} \otimes \mathbb{R}(2^{r+4})$$

Veta 2.3.3. *(Veta o periodicite) [9, str 27, 4.3] Ako špeciálny prípad predošlých výpočtov vidíme, že platí pre $n \geq 8$:*

- $\mathrm{Cl}_{(0,n)} \cong \mathrm{Cl}_{(0,n-8)} \otimes \mathbb{R}(16)$
- $\mathrm{Cl}_{(n,0)} \cong \mathrm{Cl}_{(n-8,0)} \otimes \mathbb{R}(16)$

Toto je veľmi dobré, lebo tenzorovanie algebrou $\mathbb{R}(n)$ je jednoduché (lema 1.6.3). Taktiež to súvisí s tzv. *Bottovou vetou o periodicite* v topológii a v tzv. K-teórii.

Kapitola 3

Reprezentácie Cliffordových algebier

3.1 Úvod

Definícia 3.1.1. Reprezentácia $\mathbb{R}$-algebry $\mathscr{A}$ je homomorfizmus $\rho : \mathscr{A} \to Hom_{\mathbb{R}}(V, V)$, kde V je vektorový priestor nad $\mathbb{R}$ a $Hom_{\mathbb{R}}(V, V)$ sú $\mathbb{R}$-lineárne zobrazenia z V do V.

Môžeme hovoriť, že $\mathscr{A}$ má akciu na V.

Vo všeobecnosti môžeme mať k-reprezentáciu nejakej k-algebry, pre nejaké pole k, $\rho : \mathscr{A} \to Hom_k(V, V)$, kde V s je vektorový priestor nad k a $Hom_k(V, V)$ sú k-lineárne zobrazenia.

Keďže $Hom_{\mathbb{R}}(V, V)$ sú v tomto kontexte reálne $n \times n$ matice, reprezentácia ρ vlastne priradí ku každému prvku algebry $\mathscr{A}$ (nie nutne rôzne) matice.

V definícií sú vlastne dve zmienky o nejakej homomorfnosti.

- ρ je homomorfizmus, teda:
  - $\rho(a + b)(v) = \rho(a)(v) + \rho(b)(v)$
  - $\rho(ab)(v) = (\rho(a) \circ \rho(b))(v) = \rho(a)(\rho(b)(v))$ Teda neplatí, že $\rho(ab)(v) = \rho(a)(v)\rho(b)(v)$, lebo to by ani nedávalo zmysel, keďže vektory vo V nemajú definované násobenie. Musíme tu násobiť prvky množiny $Hom_{\mathbb{R}}(V, V)$. Ale to vieme, je to obyčajné násobenie matíc, ktoré korešponduje so skladaním funkcií $AB \sim f_A \circ f_B$.
- $Hom_{\mathbb{R}}(V, V)$ sú lineárne zobrazenia z V do V.
  - $\rho(a)(u + v) = \rho(a)(u) + \rho(a)(v)$
  - $\rho(a)(\alpha u) = \alpha\rho(u)$

Veľmi často sa vynecháva zápis zo zátvorkami a používame skrátenú notáciu*, pre $a \in \mathscr{A}$, $v \in V$

$$a \cdot v := \rho(a)(v)$$

Príklad 3.1.2. Jeden veľmi jednoduchý prípad, algebra $\mathbb{R}(n)$ má svoju prirodzenú reprezentáciu.

$$\begin{aligned} \rho : \mathbb{R}(n) &\to Hom_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \cong \mathbb{R}(n) \\ A &\mapsto A \end{aligned}$$

Všetky podmienky čo treba skontrolovať vyplývajú zo základnej lineárnej algebry.

- $(A + B)v = Av + Bv$
- $(AB)(v) = A(B(v))$
- $A(u + v) = Au + Av$
- $A(\alpha v) = \alpha A(v)$

Keď zoberieme nejaký podpriestor $W \subset V$, vieme akciu algebry $\mathscr{A}$ zúžiť na ten podpriestor. Toto nemusí byť nutne reprezentácia, lebo nemáme zaručené, že $\mathscr{A} \cdot W \subset W$.

Definícia 3.1.3. Reprezentáciu $\rho : \mathscr{A} \to Hom_k(V, V)$ voláme *ireducibilná*, ak pre všetky podpriestory $W \subset V$ z toho, že $\mathscr{A} \cdot W \subset W$ vyplýva, že $W = \{\vec{0}\}$ alebo $W = V$.

Hovoríme, že reprezentácia nemá $\mathscr{A}$-invariantný, vlastný, netriviálny podpriestor.

3.2 Reprezentácie ako moduly

Teraz sa presvedčíme, že keď máme reprezentáciu nejakej algebry $\mathscr{A}$, tak to nie je nič iné, ako mať modul nad $\mathscr{A}$. Prečo potom hovoriť o reprezentáciách? Lebo vo všeobecnosti reprezentácie iných objektov ako algebier/okruhov (napríklad grúp) nie sú moduly.

Majme reprezentáciu $\rho : \mathscr{A} \to Hom_k(V, V)$. Z nej vytvoríme $\mathscr{A}$-modul $(M, +, \cdot)$ v zmysle $M = V$, operácia $+$ je klasické sčitovanie vo V a násobenie $\cdot$ je akcia v reprezentácii.

Lema 3.2.1. *Reprezentácia vnímaná ako modul, je ireducibilná práve vtedy, keď korešpondujúci modul nemá vlastné podmoduly.*

Definícia 3.2.2. Dve reprezentácie tej istej algebry sú izomorfné, keď ich moduly sú izomorfné.

*Je to notácia akcie algebry na vektorovom priestore

V príklade 1.4.8 z časti 1.4 sme mali, že pre okruh (algebru) R a jeho(jej) ľavý ideál I máme, že I je R-modul. Teraz vyslovíme lemu, ktorá sa nám bude hodiť neskôr.

Lema 3.2.3. *Majme nejakú algebru $\mathscr{A}$ a jej ľavý ideál $I \subset \mathscr{A}$. Potom I nemá vlastný netriviálny ľavý (pod)ideál práve vtedy, keď I ako modul nemá vlastný podmodul.*

3.3 Akcia $\mathbb{C}(n)$ a $\mathbb{H}(n)$ na vektorovom priestore $\mathbb{R}^N$

Toto sú klasické identifikácie komplexných a kvaterniónových matíc a vektorov s reálnymi maticami a vektormi.

$$\mathbb{C}^n \longleftrightarrow \mathbb{R}^{2n}$$
$$\begin{pmatrix} a_1 + b_1 i \\ \vdots \\ a_n + b_n i \end{pmatrix} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ \vdots \\ a_n \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{H}^n \longleftrightarrow \mathbb{R}^{4n}$$
$$\begin{pmatrix} a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k \\ \vdots \\ a_n + b_n i + c_n j + d_n k \end{pmatrix} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \\ d_1 \\ \vdots \\ a_n \\ b_n \\ c_n \\ d_n \end{pmatrix}$$

Teda dá sa nájsť aj korešpondencia medzi

$$\mathbb{C}(n) \longleftrightarrow \mathbb{R}(2n)$$
$$\mathbb{H}(n) \longleftrightarrow \mathbb{R}(4n)$$

ktorá by rešpektovala korešpondencie vektorov, teda ku $A \in \mathbb{C}(n)$ nájsť $A' \in \mathbb{R}(2n)$, také, že korešpondujúce vektory pošlú A, A' na korešpondujúce vektory.

Definícia 3.3.1. Definujme vnorenia

$$\phi : \mathbb{C}(1) \to \mathbb{R}(2)$$
$$a + bi \mapsto \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

$$\psi : \mathbb{H}(1) \to \mathbb{R}(4)$$
$$a + bi + cj + dj \mapsto \begin{pmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{pmatrix}$$

Overenie, že to platí, je ľahký výpočet.

Teda aj $\mathbb{R}$-algebry $\mathbb{C}(n)$, $\mathbb{H}(n)$ majú prirodzenú akciu na priestor $\mathbb{R}^{2n}$, resp. $\mathbb{R}^{4n}$.

3.4 Reprezentácie $\mathbb{R}$-algebier $k(n)$, $k = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$

V tejto časti sa budeme opierať o knihu *Algebra* od profesora Langa [8, str. 641-657]. Naše potreby sú skromnejšie ako uvažuje korešpondujúca časť jeho knihy, preto sme niektoré zdanlivo relevantné časti vynechali alebo nahradili.

Chceli by sme ukázať, že $\mathbb{R}$-algebry $k(n)$, $k = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ majú len jednu nenulovú ireducibilnú reprezentáciu- svoju prirodzenú reprezentáciu (až na izomorfizmus, v zmysle izomorfizmu modulov). Z toho odvodíme, že algebry typu $k(n) \oplus k(n)$, $k = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ majú práve dve neizomorfné reprezentácie. Takto pokryjeme všetky alternatívy, ktoré môžu nastať v Cliffordových algebrách, akými sme sa zaoberali.

To, že je prirodzená reprezentácia ireducibilná, dokážeme až o chvíľu.

Majme algebru $k(n)$, $k = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$.

Vyjadrime $k(n)$ ako priamy súčet nejakých ľavých ideálov, ktoré sú jednoduché ako modul nad $k(n)$(ekvivalentne nemajú ľavý vlastný netriviálny podideál).

Označme L_i podmnožinu $k(n)$, množinu všetkých matíc, ktoré majú všetky prvky okrem i-teho stĺpca nulové. Presvedčme sa, že je to ľavý ideál algebry $k(n)$.

Zoberme ľubovoľnú maticu $A \in k(n)$, $C \in L_i$. Potom je ľahko vidieť, že AC má nenulové prvky maximálne v i-tom stĺpci.

Teda L_i je uzavreté na násobenie a zjavne aj na sčitovanie. Je to podalgebra, aj ľavý ideál.

Ukážme, že všetky ľavé ideály L_i (pre všetky i stĺpce) nemajú vlastné ľavé podideály. Prácu nám uľahčí tento poznatok z lineárnej algebry.

Lema 3.4.1. *[7, str. 40, Veta 8.8] Majme množinu A lineárne nezávislých, nenulových vektorov vektorového priestoru V. Zoberme si nejaký ľubovoľný vektorový priestor W nad tým istým poľom. Majme ľubovoľnú funkciu $\tilde{f} : A \to W$. Potom existuje lineárna funkcia (nie nutne jedinečná) $f : V \to W$, t.ž $f \restriction_A = \tilde{f}$.*

Majme nejaký netriviálny ľavý podideál $I \subset L_i$, zoberme nejaké $0 \neq A \in I$. Položme

$v = (v_1, \dots, v_n) \in k^n$ takto

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & v_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & v_2 & 0 & \dots & 0 \\ & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ 0 & \dots & 0 & v_{n-1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & v_n & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

v je ten nenulový stĺpec v A.

Zvoľme ľubovoľný vektor $w = (w_1, \dots, w_n) \in k^n$ a položme:

$$\begin{aligned} \tilde{f} : \{v\} &\to k^n \\ v &\mapsto w \end{aligned}$$

Podľa predošlej lemy 3.4.1 existuje lineálne rozšírenie $f : k^n \to k^n$ zobrazenia $\tilde{f}$. Nech $M_w \in k(n)$ je matica, reprezentujúca zobrazenie f.

Teraz je

$$M_w A = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & w_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & w_2 & 0 & \dots & 0 \\ & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ 0 & \dots & 0 & w_{n-1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & w_n & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Keďže w bolo ľubovoľné, môžeme povedať, že $I = L_i$.

Všimneme si, že všetky ľavé ideály typu L_i sú izomorfné s k^n.

Teda dostávame tvrdenie:

Veta 3.4.2. *Algebry $k(n)$, $k = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ majú rozklad na priamy súčet $k(n) \cong L_1 \oplus L_2 \oplus \dots \oplus L_n$.*

Tvrdenie 3.4.3. *Prirodzená reprezentácia algebry $k(n)$ je ireducibilná.*

Dôkaz. Chceme ukázať že neexistuje $\emptyset \neq V \subsetneq k^n$, také, že $k(n) \cdot V \subset V$. Ale to by hneď protirečilo leme 3.4.1 o existencii mapy z $v \in V$ kamkoľvek. $\square$

Veta 3.4.4. *Algebry $k(n)$, pre $k = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$. Majú len jednu- svoju prirodzenú ireducibilnú reprezentáciu*

Na dôkaz budeme potrebovať nasledujúcu lemu.

Lema 3.4.5. *[8, str. 651, Lema 4.2] Majme algebru $\mathscr{A}$, jej ľavý ideál $I \subset \mathscr{A}$ bez netriviálnych vlastných ľavých podideálov. Majme ireducibilnú reprezentáciu algebry $\mathscr{A}$, $\rho : \mathscr{A} \to Hom_{\mathbb{R}}(V, V)$. Potom ak $\mathscr{A}$-modul ideálu I nie je izomorfný s modulom reprezentácie ρ, tak $I \cdot V = \{\vec{0}\}$.*

Dôkaz. (vety 3.4.4) Pozrime sa, čo táto lema pre nás znamená. Podľa vety 3.4.2 máme $k(n) \cong L_1 \oplus L_2 \oplus \ldots \oplus L_n$, teda ľubovoľná matica $A \in k(n)$ sa dá napísať ako $A = \sum_{i=1}^{n} l_i$, kde $l_i \in L_i$. Ak by sme mali reprezentáciu algebry $k(n)$ $\rho : \mathscr{A} \to Hom_{\mathbb{R}}(V, V)$ neizomorfnú ako modul s modulom ideálu L_i, potom pre ľubovoľnú maticu $A = \sum_{i=1}^{n} l_i \in k(n)$ a ľubovoľný vektor $v \in V$ platí $A \cdot v = (\sum_{i=1}^{n} l_i) \cdot v = \sum_{i=1}^{n} l_i \cdot v = \vec{0}$, teda ρ by musela byť triviálna reprezentácia. □

Dôkaz. (lemy 3.4.5) V tomto dôkaze je $\cdot$ akcia v reprezentácii ρ.

Presvedčme sa, že $I \cdot V \subset V$ je $\mathscr{A}$-invariantný podpriestor.

$$\begin{aligned} \mathscr{A} \cdot (I \cdot V) &= \\ &= (\mathscr{A} \cdot I)(V) \subset I \cdot V \end{aligned}$$

Posledná inklúzia platí preto, lebo I je ľavý ideál.

Vďaka ireducibilite ρ platí $I \cdot V =$ buď V alebo $\{\vec{0}\}$.

Predpokladajme pre spor, že $I \cdot V = V$.

Teda $\exists v \in V$, t.ž. $I \cdot v \neq \{\vec{0}\}$

Tvrdíme, že funkcia

$$\phi : I \to V$$
$$i \mapsto i \cdot v$$

je izomorfizmus modulov, lebo je homomorfizmus:

$$\begin{aligned} \phi(ri + sj) &= \\ &= (ri + sj) \cdot v = \\ &= (ri) \cdot v + (sj) \cdot v = \\ &= r(i) \cdot v + s(j) \cdot v = \\ &= r\phi(i) + s\phi(i) \end{aligned}$$

ϕ je injektívna, lebo inak by bol $\ker \phi$ jej ľavý podideál takto:

$$\begin{aligned} &i \in \ker \phi \\ &A \in k(n) \implies Ai \in I \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi(Ai) &= \\ &= (Ai) \cdot v = \\ &= A \cdot (i \cdot v) = \\ &= A \cdot 0 = \\ &= 0 \implies Ai \in \ker \phi \end{aligned}$$

ϕ je surjektívna, lebo inak by bol $\mathrm{Im}(I) = L \cdot v$ $\mathscr{A}$- invariantný vlastný podpriestor takto:

$$\begin{aligned} \mathscr{A} \cdot (I \cdot v) &= \\ &= (\mathscr{A} \cdot I)(v) \subset I \cdot v \end{aligned}$$

Takže ϕ je izomorfizmus, čo je spor s predpokladom.

Platí teda $I \cdot V = \{\vec{0}\}$. □

Dôsledok 3.4.6. *Majme algebru $k(n) \oplus k(n)$, kde $k = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$. Takáto algebra má dve (až na izomorfizmus) nenulové, neizomorfné ireducibilné reprezentácie:*

$$\begin{aligned} \rho_1 : k(n) \oplus k(n) &\to Hom_{\mathbb{R}}(k^n, k^n) \\ (A \oplus B) \cdot x &\mapsto A \cdot x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho_2 : k(n) \oplus k(n) &\to Hom_{\mathbb{R}}(k^n, k^n) \\ (A \oplus B) \cdot x &\mapsto B \cdot x \end{aligned}$$

kde $\cdot$ je jediná ireducibilná akcia $k(n)$ na $Hom_{\mathbb{R}}(k^n, k^n)$.

Dôkaz. Majme nenulovú ireducibilnú reprezentáciu

$$\rho : k(n) \oplus k(n) \to Hom_{\mathbb{R}}(V, V)$$

Tvrdíme, že existuje vektor $v \in V$, t.ž. $(k(n) \oplus 0) \cdot v \neq 0$ alebo $(0 \oplus k(n)) \cdot v \neq 0$. Ak by tomu tak nebolo, potom pre ľubovoľné $w \in V$ máme
$(k(n) \oplus k(n)) \cdot w = (k(n) \oplus 0) \cdot w + (0 \oplus k(n)) \cdot w = 0$.

Zvoľme také v a predpokladajme, že platí $(k(n) \oplus 0) \cdot v \neq 0$.

Nech je $0 \neq W \subset V$ najmenší podpriestor uzavretý na akciu $(k(n) \oplus 0)$, teda $W = (k(n) \oplus 0) \cdot v$. Potom W je teda netriviálna ireducibilná (lebo W sme zobrali minimálny) reprezentácia $k(n) \oplus 0 \cong k(n)$, teda $W \cong k^n$.

Ďalej majme $W' \subset V$ najmenší podpriestor uzavretý na akciu $(0 \oplus k(n))$, teda $W' = (0 \oplus k(n)) \cdot v$. O tomto ešte nevieme, že je prázdny, ale budeme sa to snažiť ukázať.

Presvedčme sa, že $W = V$. Naozaj, pre ľubovoľné $A \oplus B \in k(n) \oplus k(n)$ a ľubovoľný prvok $(A' \oplus 0) \cdot v \in W$ máme

$$\begin{aligned} (A \oplus B) \cdot ((A' \oplus 0) \cdot v) &= \\ &= ((A \oplus B) \cdot (A' \oplus 0)) \cdot v = \\ &= (AA' \oplus 0) \cdot v \quad \in k(n) \oplus 0 \end{aligned}$$

Z toho, že ρ je ireducibilná, máme $W = V$.

Keďže $v \in V = W$, existuje $A \in k(n)$, t.ž. $(A \oplus 0) \cdot v = v$. Majme ľubovoľné $u \in W'$. Vektor u sa dá napísať ako $u = (0 \oplus B) \cdot v$ pre nejaké $B \in k(n)$. Počítame a dostaneme

$$
\begin{aligned}
u &= \\
&= (0 \oplus B) \cdot v = \\
&= (0 \oplus B) \cdot ((A \oplus 0) \cdot v) = \\
&= (0 \oplus 0) \cdot v = \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Dostávame to, čo sme chceli $W' = 0$. Toto korešponduje s prvou reprezentáciou z vety. Počas dôkazu sme predpokladali, že $\exists v, (k(n) \oplus 0) \cdot v \neq 0$. Keby sme predpokladali druhú možnosť $\exists v, (0 \oplus k(n)) \cdot v \neq 0$, dostali by sme druhú možnosť. $\square$

Kapitola 4

Aplikácia Cliffordových algebier na vektorové polia na sférach

4.1 Topologické prerekvizity

V tejto časti ponúkneme veľmi skrátený úvod do diferenciálnej topológie spolu s intuíciou o definovaných pojmoch. Budeme často odkazovať na texty [6] a [3], lebo diferenciálna topológia nie je zameraním tejto práce.

Uvedieme slávny výsledok J.F. Adamsa [1] o všade lineárne nezávislých vektorových poliach na sférach. Tento výsledok, ktorý tu nedokážeme, hovorí o ich maximálnom možnom počte. My opíšeme jednu takú konštrukciu uvedenú v [9] s použitím Cliffordových algebier.

Definícia 4.1.1. (Topologický priestor) Pod topologickým priestorom rozumieme dvojicu (X, τ), kde X je nejaká množina a $\tau \subset \mathcal{P}(X)$ taká, že

1. $\emptyset \in \tau$, $X \in \tau$.
2. Každy *konečný prienik* množín z τ je v τ.
3. Ľubovoľné *zjednotenie* množín z τ je v τ.

Množiny v τ voláme otvorené.

Spojitá mapa medzi topologickými priestormi je taká, kde vzor otvorenej množiny je otvorená množina. Bijektívna spojitá mapa sa volá *homeomorfizmus*, ak aj jej inverzná funkcia je spojitá.

Pod podpriestorom Y topologického priestoru X, myslíme, že $Y \subset X$ a

$$V \in \tau_Y \Leftrightarrow \exists U \in \tau_X, U \cap Y = V.$$

Overia sa podmienky a zistíme, že Y je topologický priestor.

Pre dva topologické priestory X, Y existuje ich tzv. súčinová topológia $(X \times Y, \tau_{X\times Y})$. Nebudeme ju tu definovať, detaily napríklad tu [6, str. 11].

Definícia 4.1.2. (Varieta) [3, str. 1, 1.1] Majme topologický Hausdorffovský priestor so spočítateľnou bázou M^{n*}, ktorý je navyše lokálne homeomorfný s $\mathbb{R}^n$, t.j. pre každý bod $p \in M^n$ existuje jeho otvorené okolie U a homeomorfizmus $\varphi : U \to U' \subset \mathbb{R}^n$ pre nejakú otvorenú množinu $U' \subset \mathbb{R}^n$. Potom M^n nazývame *varieta* (angl. *manifold*).

Číslo n v M^n označujúce dimenziu budeme vynechávať, teda píšeme M.

My budeme uvažovať iba variety vložené do nejakého priestoru $\mathbb{R}^{N\dagger}$.

$$M \hookrightarrow \mathbb{R}^N$$

Takéto variety nie sú až také zovšeobecnenie, lebo platí veta, že každá hladká n-rozmerná varieta sa dá vložiť do Euklidovského priestoru $\mathbb{R}^{2n}$ tak, že M bude v $\mathbb{R}^{2n}$ uzavretá množina [3, str. 71, veta 7.10]. Tento výsledok sa volá *Whitneyho veta o vnorení.*

Definícia 4.1.3. (Hladká differencovateľná štruktúra) Majme varietu M^n. Pod hladkou differencovateľnou štruktúrou na M rozumieme systém $\mathcal{F} = \{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$, kde $\varphi_i : U_i \to U' \subset \mathbb{R}^n$ je hladký homeomorfizmus (difeomorfizmus) a platí:

1. $\bigcup_{i \in I} U_i = M$
2. Pre všetky $i, j \in I$ platí, že funkcie $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(U_i \cap U_j) \to \varphi_j(U_i \cap U_j)$ sú hladké.
3. $\mathcal{F}$ je maximálny taký systém, ktorý spĺňa prvé dve podmienky.

   Každú dvojicu z hladkej štruktúry (U, φ) voláme lokálne súradnice bodu $x \in U$.

Definícia 4.1.4 (Hladká varieta)**.** Hladká varieta je varieta s hladkou diferencovateľnou štruktúrou.

Príklad 4.1.5. Pod $n-$rozmernou sférou (tzv. n-sféra) rozumieme $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} | \, \|x\| = 1\}$. Dá sa ukázať, že S^n je hladká varieta.

Príklad 4.1.6. Priestor $\mathbb{R}^n$ je hladká varieta.

Termín podvariety je celkom komplikovaný. Na rozdiel od topologického priestoru, nie každá podmnožina môže byť podvarietou. Definíciu môžeme nájsť napríklad tu [3, str. 9-10]. My budeme potrebovať že S^n je podvarieta R^{n+1}.

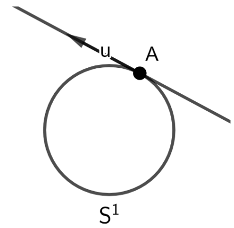
Teraz sa pozrime na dotyčnice. Zoberme si napríklad S^1, čiže kružnicu. Nad každým bodom A kružnice je jeho dotyčnica, na ktorú sa budeme pozerať ako na (jednorozmerný) vektorový (a topologický‡) priestor nad $\mathbb{R}$. (Budeme ho značiť $T_A S^1$).

---

*Detaily tých pojmov sú napr. vo [6]

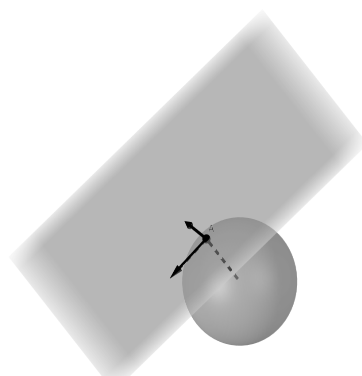
†Slovo vložené je technický pojem. Detaily napr. tu [3, str. 10, definícia 1.10]

‡vždy s bežnou Euklidovskou topológiou



Obr. 4.1: Dotyčnica kruhu v bode

Pre S^2 a bod A máme podobnú situáciu. Toto bude dôležité, tak to znovu zdôrazníme: v každom bode sa dá dotyková rovina chápať ako (dvojrozmerný) vektorový priestor nad $\mathbb{R}$.



Obr. 4.2: Dotyčnica 2-sféry v bode

Je asi uveriteľné, že dotykový priestor ku $A \in S^n$ bude $n-$rozmerný reálny vektorový priestor.

Definícia 4.1.7. (Dotykový vektor)
Majme n-rozmernú varietu M, bod $x \in M$ a lokálne súradnice (U, φ), $p \in U$.
Zoberme si krivky $\gamma : \langle -1, 1 \rangle \to M$, také, že $\gamma(0) = x$.
Definujme triedu ekvivalencie $\sim$ na takých krivkách nasledovne:

$$\gamma_1 \sim \gamma_2 \Leftrightarrow (\varphi \circ \gamma_1)'(0) = (\varphi \circ \gamma_2)'(0)$$

Jedna takáto trieda ekvivalencie sa volá *dotykový vektor* M v bode x.

Keď máme vloženie

$$M \hookrightarrow \mathbb{R}^N$$

Tak definované dotykové vektory naozaj korešpondujú k dotykovým vektorom v danom bode, ako sa študuje v reálnej analýze.

Lema 4.1.8. *Dotykové vektory tvoria reálny vektorový priestor, ktorého dimenzia súhlasí s dimenziou variety.*

Definícia 4.1.9. Vektorový priestor z predošlej lemy voláme *dotykový priestor* v bode $x \in M$. Značíme T_xM. Je to aj topologický priestor s bežnou Euklidovskou topológiou.

Bolo by potrebné ukázať, že táto konštrukcia nezávisí na výbere lokálnych súradníc. Detaily, ktoré sme preskočili, sa dajú nájsť napríklad tu [4, str. 23-24].

Chceli by sme zlúčiť všetky dotykové priestory do jedného topologického priestoru, konkrétnejšie do jednej hladkej variety.

Definícia 4.1.10. (Dotyková varieta)

Majme množinu $TM := \coprod_{x\in M} T_xM$[§] a projekciu, ktorá ukáže každému vektoru, z čieho dotykového priestoru pochádza.

$$\begin{aligned} p : TM &\to M \\ v &\mapsto x \Leftrightarrow v \in T_xM \end{aligned}$$

Teraz chceme opísať topológiu na TM (detaily napríklad tu [3, str. 30]).

Pre bod $x \in M$ zoberme jeho nejaké lokálne súradnice (U_x, φ_x), teda $\varphi_x(U_x) \cong U$ pre $U \subset \mathbb{R}^n$ otvorenú množinu. Platí že $T_xM \cong \mathbb{R}^n$. Taktiež máme bijekciu množín $\varphi_x : p^{-1}(U_x) \to U \times \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. Množinu $A \subset p^{-1}(U_x)$ nazveme *otvorená* práve vtedy ak platí, že $\varphi_x(A \cap p^{-1}(U_x))$ je otvorená v $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. Bolo by potrebné ukázať, že je to dobrá definícia, teda nezávisí od výberu lokálnych súradníc. Množina $B \subset TM$ je otvorená ak pre každé $x \in B$ existuje také otvorené A, že $x \in A \subset B$.

Projekcia variety $p : TM \to M$ je príklad všeobecnejšieho pojmu *vektorovej fibrácie* (angl. *vector bundle*). Vo všeobecnosti n-rozmerná vektorová fibrácia je surjektívna funkcia $\phi : E \to X$ taká, že platí:

- Pre $\forall x \in X$ má $\pi^{-1}(x) = E_x$ štruktúru n -rozmerného vektorového priestoru.
- Pre každé $x \in X$ existuje jeho otvorené okolie $x \in U \subset X$, také že existuje homeomorfizmus $f : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^n$, ktorého zúženie je navyše izomorfizmus vektorových priestorov $f \restriction E_x \to \{x\} \times \mathbb{R}^n$.

Priestory E_x sa nazývajú *fibre* (s.g. *fiber*).

Príklad 4.1.11. Majme vektorový a topologický priestor $\mathbb{R}^2$ a nech je $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ projekcia na prvú súradnicu. Priestory E_x sú 1-rozmerné fibre.

Príklad 4.1.12. Fibrácia $p : TM \to M$ má n-rozmerné fibre.

[§]Značka $\coprod$ je v tomto prípade disjunktné zjednotenie. Je to ako keby sme napísali $\cup_{x\in M} T_xM$, len v predošlom zápise je zdôraznené, že množiny T_xM považujeme za disjunktné.

Lema 4.1.13. *Platia nasledujúce izomorfizmy.*

a) $T_x\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n$

b) $T\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$

Lema 4.1.14. *Podvarieta má pod-dotykový priestor*

Ak $N \hookrightarrow M$, triedy ekvivalencie definujúce dotykové vektory v N sa injektívne vložia do tried ekvivalencií definujúcich vektory v M. Teda pre $\gamma_1, \gamma_2 : \langle -1, 1 \rangle \to N$ platí, že $\gamma_1 \sim_N \gamma_2 \Leftrightarrow \gamma_1 \sim_M \gamma_2$. Potom je vloženie v nasledujúcom diagrame dobre definované.

$$\begin{tikzcd} N \arrow[r, hook] & M \\ TN \arrow[u, "p_N"] \arrow[r, hook, dotted] & TM \arrow[u, "p_M"'] \end{tikzcd}$$

Pre nás bude dôležitý pojem hladkého vektorového poľa na sfére.

Definícia 4.1.15 (Vektorové pole)**.** Majme varietu M, (napríklad S^n) a projekciu

$$\begin{aligned} p : TM &\to M \\ v &\mapsto x \Leftrightarrow v \in T_x M \end{aligned}$$

Vektorové pole na M je *rez (angl. section)* mapy p, t.j. je to funkcia

$$s : M \to TM$$

také že $s(p(m)) = m, \forall m \in M$.

Inak povedané, každý bod $m \in M$ dostane jeden *svoj* dotykový vektor.

To, že je s rez, môžeme značiť takto

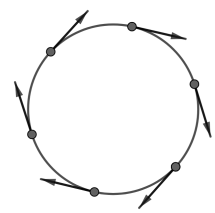
$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "s"'] & TM \arrow[l, bend right, "p"'] \end{tikzcd}$$

Vektorové pole je hladké, ak je s hladká funkcia.

Nás bude zaujímať, ktoré zo sfér S^n majú všade nenulové hladké vektorové polia a koľko navzájom lineárne nezávislých ich majú. Vektorové polia $\{s_1, \ldots, s_n\}$, $s_i : M \to TM, \quad \forall i = 1, \ldots, n$ voláme lineárne nezávislé, ak pre $\forall m \in M$ sú vektory $s_1(m), \ldots, s_n(m)$ lineárne nezávislé v zmysle vektorového priestoru $T_m M$(v ktorom všetky ležia). Samozrejme lineárna nezávislosť implikuje nenulovosť v každom bode.

Kvôli dimenzii dotykového priestoru v každom bode $x \in S^n$, je horné ohraničenie počtu (hladkých) lineárne nezávislých vektorových polí n.

Na kružnici(S^1) je to jednoduché(vektory sú upresnené v nasledujúcom príklade).



Obr. 4.3: Hladké vektorové pole na kružnici

Našli sme jedno hladké vektorové pole a podľa našej diskusie, viac navzájom lineárne nezávislých neexistuje.

Príklad 4.1.16. Na nepárnorozmerných sférach vieme jedno také všade nenulové vektorové pole hneď napísať.

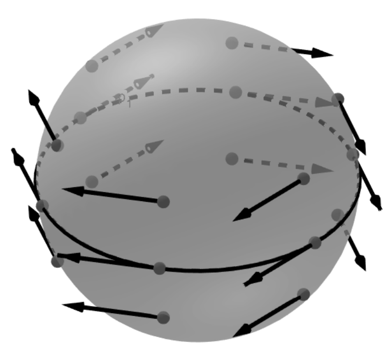
Majme n nepárne. $S^n = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) = x \in \mathbb{R}^{n+1} |\, \|x\| = 1\}$.

Definujme hladký rez

$$\begin{aligned} s : S^n &\to TS^n \\ (x_1, \dots, x_{n+1}) &\mapsto (-x_2, x_1, -x_4, x_3, \dots, -x_{n+1}, x_n) \in T_x S^n \end{aligned}$$

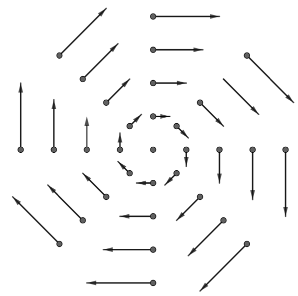
To, že je obraz s v dotykovom priestore, odôvodnime tým, že pre platí $x \perp s(x)$.

Na S^2 to ale nepôjde, keby sme sa napríklad pokúsili uložiť vektory v smere rovnobežiek rovníka takto:



Obr. 4.4: Dotyčnice ku S^2

Intuitívne, na severnom a južnom póle by sme spojito nemohli určiť nenulový vektor, tam by boli akési oká hurikána ako na obrázku.



Obr. 4.5: Oko hurikánu

Toto samozrejme nie je dôkaz, o párnorozmerných sférach niečo napíšeme v časti 4.4.

Ak máme hladkú funkciu $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, dá sa interpretovať ako hladký rez

$$\begin{aligned} A' : \mathbb{R}^n &\to T\mathbb{R}^n \\ x &\mapsto v \in T_x\mathbb{R}^n \end{aligned}$$

Toto nám veľmi pomôže. Čo v tomto texte rozhodne nechýba, je množstvo lineárnych (hladkých) zobrazení, prvkov algebier $k(n)$.

4.2 Výber vhodného skalárneho súčinu

Definícia 4.2.1. (Cliffordova grupa) Majme Cliffordovu algebru $Cl_{n,0}$ a jej generátory $\{e_1, \dots e_n\}$. Pamätajme, že teraz platí $e_i \cdot e_i = -1, \quad$, pre $i = 1, \dots, n$.

Pod Cliffordovou grupou rozumieme konečnú grupu F_n zapísanú multiplikatívne generovanú prvkami $\{-1, e_1, \dots, e_n\}$, ktoré sa správajú ako v $Cl_{n,0}$. Teda

$$F_n = \langle -1, e_1, \dots, e_n \mid (-1)^2 = 1, (-1)e_i = e_i(-1), e_ie_i = -1, e_ie_j = (-1)e_je_i \rangle$$

(Tento zápis hovorí, že všetko vľavo od zvislej čiary (|) je generátor a všetko napravo je relácia, ktorá v tej grupe platí. A my hľadáme tú najväčšiu grupu, čo to spĺňa. Tento zápis sa volá *prezentácia grupy.*)

Definícia 4.2.2. Majme reprezentáciu nejakej Cliffordovej algebry $\rho : Cl_{n,0} \to Hom_{\mathbb{R}}(V, V)$. Označme $K = \dim V$. Vezmime skalárny súčin $\langle \cdot, \cdot \rangle$ kvadratického priestoru $\mathbb{R}^{K,0}$.

Definujme ďalší skalárny súčin na $\mathbb{R}^{K,0}$ spriemerovaním toho bežného.

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle_{\text{avg}} : \mathbb{R}^{K,0} \times \mathbb{R}^{K,0} &\to \mathbb{R} \\ \langle x, y \rangle_{\text{avg}} &\mapsto \frac{1}{|F_n|} \sum_{g \in F_n} \langle g \cdot x, g \cdot y \rangle. \end{aligned}$$

Predošlá konštrukcia je príklad užitočnej konštrukcie spriemerovania nejakého operátora na konečnej grupe.

Musíme samozrejme ukázať správnosť tejto konštrukcie.

Lema 4.2.3. *Spriemerovaný súčin je naozaj skalárny súčin na $\mathbb{R}^K$ (t.j. je kladne definitný, tak ako pôvodný súčin na $\mathbb{R}^{K,0}$)*

Dôkaz.

- symetrickosť

  Toto vidíme hneď zo symetrickosti pôvodného skalárneho súčinu.

- bilinearita

  Vďaka symetrickosti stačí overiť jednu stranu.

$$
\begin{aligned}
\langle \alpha u + \beta v, y \rangle_{\text{avg}} = & \\
&= \frac{1}{|F_n|} \sum_{g \in F_n} \langle g \cdot (\alpha u + \beta v), g \cdot y \rangle = \\
&= \frac{1}{|F_n|} \sum_{g \in F_n} \langle \alpha g \cdot u + \beta g \cdot v, g \cdot y \rangle = \\
&= \frac{1}{|F_n|} \sum_{g \in F_n} (\langle \alpha g \cdot u, g \cdot y \rangle + \langle \beta g \cdot v, g \cdot y \rangle) = \\
&= \frac{1}{|F_n|} \sum_{g \in F_n} (\alpha \langle g \cdot u, g \cdot y \rangle + \beta \langle g \cdot v, g \cdot y \rangle) = \\
&= \alpha \frac{1}{|F_n|} \sum_{g \in F_n} \langle g \cdot u, g \cdot y \rangle + \beta \frac{1}{|F_n|} \sum_{g \in F_n} \langle g \cdot v, g \cdot y \rangle = \\
&= \alpha \langle u, y \rangle_{\text{avg}} + \beta \langle v, y \rangle_{\text{avg}}
\end{aligned}
$$

- Kladná definitnosť

  Je zrejmá, pravá strana bude len nejaký súčet kladných čísel vydelený kladným číslom.

□

To, čo robí túto konštrukciu užitočnou je, že náš nový spriemerovaný skalárny súčin je invariantný na akciu prvkov Cliffordovej grupy F_n. Teda

Lema 4.2.4. *Majme $g_0 \in F_n$ a nejaké vektory $x, y \in \mathbb{R}^{K,0}$. Potom $\langle g_0 \cdot x, g_0 \cdot y \rangle = \langle x, y \rangle$*

Dôkaz.

$$
\begin{aligned}
\langle g_0 \cdot x, g_0 \cdot y \rangle = & \\
&= \frac{1}{|F_n|} \sum_{g \in F_n} \langle g \cdot (g_0 \cdot x), g \cdot (g_0 \cdot y) \rangle \qquad = \\
&= \frac{1}{|F_n|} \sum_{g \in F_n} \langle (g g_0) \cdot x, (g g_0) \cdot y \rangle
\end{aligned}
$$

Tu využijeme krásnu vlastnosť grúp, že funkcia násobenie prvkov je bijekcia (teda funkcia $\begin{array}{c} G \to G \\ g \mapsto gg_0 \end{array}$ je bijekcia). Spravme substitúciu $h = gg_0$ a dostaneme:

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{|F_n|} \sum_{hg_0^{-1} \in F_n} \langle h \cdot x, h \cdot y \rangle = \\
&= \frac{1}{|F_n|} \sum_{h \in F_n} \langle h \cdot x, h \cdot y \rangle = \\
&= \langle x, y \rangle
\end{aligned}$$

□

Takže teraz vieme, že náš skalárny súčin je invariantný na akciu bázových, ortonormálnych prvkov z kvadratického priestoru $\mathbb{R}^{n,0} \hookrightarrow Cl_{n,0}$. Teda dostávame:

Dôsledok 4.2.5. *Spriemerovaný skalárny súčin $\langle \cdot, \cdot \rangle_{avg}$ je invariantný na akciu jednotkových vektorov priestoru $\mathbb{R}^{n,0} \hookrightarrow \mathrm{Cl}_{n,0}$.*

Teraz konečne dokážeme kolmosť.

Lema 4.2.6. *Pre všetky vektory $x \in \mathbb{R}^{K,0}$ a $0 \neq g \in \mathrm{Cl}_{n,0}$ platí*

$$\langle g \cdot x, x \rangle_{avg} = 0$$

Dôkaz.

$$\begin{aligned}
\langle g \cdot x, x \rangle_{\text{avg}} = & \\
&= \langle x, g \cdot x \rangle_{\text{avg}} = \\
&= \langle \frac{g}{\|g\|} \cdot x, \frac{g}{\|g\|} \cdot (g \cdot x) \rangle_{\text{avg}} = \\
&= \frac{1}{\|g\|^2} \langle g \cdot x, (g \cdot g) \cdot x \rangle_{\text{avg}} = \\
&= \frac{1}{\|g\|^2} \langle g \cdot x, -\|g\|^2 \cdot x \rangle_{\text{avg}} = \\
&= \langle g \cdot x, -x \rangle_{\text{avg}} = \\
&= -\langle g \cdot x, x \rangle_{\text{avg}}
\end{aligned}$$

Teda $\langle g \cdot x, x \rangle_{\text{avg}} = 0$. □

4.3 Konštrukcia vektorových polí na sférach

Ako teda budeme postupovať, keď chceme nájsť nejaký veľký počet hladkých vektorových polí na niektorých sférach?

Takto nájdeme jedno hladké vektorové pole:
Zoberme si S^n ako hladkú podvarietu $\mathbb{R}^{n+1}$, kde $n \geq 1$.

$$S^n \xhookrightarrow{i} \mathbb{R}^{n+1}$$

Zoberme maticu $A \in \mathbb{R}(n+1)$. Matica je hladký rez priestoru $\mathbb{R}^{n+1}$.

$$\begin{tikzcd} S^n \arrow[r, hook, "i"] & \mathbb{R}^{n+1} \arrow[d, "A"] \\ & T\mathbb{R}^{n+1} \end{tikzcd}$$

Funkcia A klesne (zúžením) na S^n.

$$\begin{tikzcd} S^n \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, "A\restriction_{S^n}"] & \mathbb{R}^{n+1} \arrow[d, "A"] \\ T\mathbb{R}^{n+1} \arrow[r, "id"] & T\mathbb{R}^{n+1} \end{tikzcd}$$

My ale vieme, že dotyková varieta ku TS^n je vložená do dotykovej variety $T\mathbb{R}^{n+1}$.

$$\begin{tikzcd} & S^n \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, "A\restriction_{S^n}"] & \mathbb{R}^{n+1} \arrow[d, "A"] \\ TS^n \arrow[r, hook] & T\mathbb{R}^{n+1} \arrow[r, "id"] & T\mathbb{R}^{n+1} \end{tikzcd}$$

Keby sme vedeli zaručiť, že funkcia $A \restriction S^n$ má obraz v TS^n (teda $A \cdot S^n \subset TS^n$), mali by sme hladký rez, teda hladké vektorové pole na S^n.

Potom, ak by sme našli k takých špeciálnych matíc $A_1, \ldots, A_k \in \mathbb{R}(n+1)$, ktoré navyše budú definovať lineárne nezávislé vektorové polia, máme vyhraté.

K tomuto nám pomôžu špeciálne prvky Cliffordových algebier.

Nanešťastie toto nebude fungovať pre bežný skalárny súčin, ale pre spriemerovaný súčin $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\text{avg}}$. Na druhú stranu vieme, že všetky skalárne súčiny na konečnorozmerných vektorových priestoroch sú ekvivalentné. Rôzne skalárne súčiny na vektorovom priestore vznikajú iba zmenou bázy.

Majme teda lineárne zobrazenie $\alpha_{n+1} : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$, také, že $\langle x, y \rangle_{\text{avg}} = \langle \alpha(x), \alpha(y) \rangle$.

$$\begin{tikzcd} S^n \arrow[r, "s"] \arrow[dr, "s'"'] & \mathbb{R}^{n+1} \\ & \mathbb{R}^{n+1} \arrow[u, "\alpha"'] \end{tikzcd}$$

Ak nájdeme s' také, že $s'(x) \perp x$ v súčine $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\text{avg}}$, definujeme $s = \alpha \circ s'$ a máme $s(x) \perp x$ v bežnom skalárnom súčine.

Zoberme si priestor $\mathbb{R}^{n+1}$ a v ňom n-sféru

$$S^n \xhookrightarrow{i} \mathbb{R}^{n+1}$$

Aká Cliffordova algebra $Cl_{n,0}$ vie mať na ňu akciu?

Budeme pracovať s korešpondenciami maticových algebier $\mathbb{C}(n)$, $\mathbb{H}(n)$ s $\mathbb{R}(2n)$ resp. $\mathbb{R}(4n)$ z časti 3.3.

Vypíšeme z tabuľky 2.3 o klasifikácii relevantný riadok a predĺžime ho kvôli názornosti podľa vety o 8-periodicite 2.3.3.

	(0,0)	(1,0)	(2,0)	(3,0)	(4,0)	(5,0)	(6,0)	(7,0)
$Cl_{p,0}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{C}$	$\mathbb{H}$	$\mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$	$\mathbb{H}(2)$	$\mathbb{C}(4)$	$\mathbb{R}(8)$	$\mathbb{R}(8) \oplus \mathbb{R}(8)$
Kde má akciu	$\mathbb{R}^1$	$\mathbb{R}^2$	$\mathbb{R}^4$	$\mathbb{R}^4$	$\mathbb{R}^8$	$\mathbb{R}^8$	$\mathbb{R}^8$	$\mathbb{R}^8$

(8,0)	(9,0)	(10,0)	(11,0)	(12,0)	(13,0)	(14,0)	(15,0)
$\mathbb{R}(16)$	$\mathbb{C}(16)$	$\mathbb{H}(16)$	$\mathbb{H}(16) \oplus \mathbb{H}(16)$	$\mathbb{H}(32)$	$\mathbb{C}(64)$	$\mathbb{R}(128)$	$\mathbb{R}(128) \oplus \mathbb{R}(128)$
$\mathbb{R}^{16}$	$\mathbb{R}^{32}$	$\mathbb{R}^{64}$	$\mathbb{R}^{64}$	$\mathbb{R}^{128}$	$\mathbb{R}^{128}$	$\mathbb{R}^{128}$	$\mathbb{R}^{128}$

Veta o 8-periodicite nám teda povie, že ak má $Cl_{p,0}$ akciu na $\mathbb{R}^K$, tak má $Cl_{p+8,0}$ akciu na $\mathbb{R}^{16K}$ (spomeňme si, že veta o 8-periodicite hovorila o tenzorovaní algebrou $\mathbb{R}(16)$). Toto ale neznamená, že priestory $\mathbb{R}^{2^n}$ sú jediné, na ktorých máme akciu Cliffordovou algebrou $Cl_{n,0}$, táto tabuľka hovorí iba o ireducibilných reprezentáciách. Nájdime nejakú reducibilnú.

Zoberme si priestor $\mathbb{R}^{N+1}$ (v ktorom o chvíľu bude žiť N-sféra). Napíšme si nejako $N+1 = 2^a b$. Ak má $Cl_{n,0}$ akciu na $\mathbb{R}^{2^a}$, potom $Cl_{n,0}$ má akciu aj na $\mathbb{R}^{N+1}$ takto

$$\begin{aligned}\rho : Cl_{n,0} &\to Hom_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^{N+1}, \mathbb{R}^{N+1})\\ g &\mapsto ((v_1, \ldots, v_{2b+1}) \mapsto (g \cdot v_1, \ldots, g \cdot v_{2b+1})) \quad v_i \in \mathbb{R}^{2^a}.\end{aligned}$$

Veta 4.3.1. *[9, str. 44, veta 7.1] Majme nejakú reprezentáciu ρ :*$\mathrm{Cl}_{n,0} \to Hom_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^{N+1}, \mathbb{R}^{N+1})$*. Potom existuje n lineárne nezávislých všade nenulových vektorových polí na S^N.*

Dôkaz. Nech je $\{e_1, \ldots, e_n\}$ štandardná báza $Cl_{n,0}$ a pre každé e_i definujme

$$\begin{aligned}V_i : \mathbb{R}^{N+1} &\to \mathbb{R}^{N+1}\\ x &\mapsto e_i \cdot x\end{aligned}$$

Podľa diskusií v predošlých častiach o dotykovej variete máme

$$\begin{tikzcd} S^N \arrow[r, hook, "i"] & \mathbb{R}^{N+1} \arrow[d, shift left, "V_i"] \\ & T\mathbb{R}^{N+1} \arrow[u, bend left, "p"] \end{tikzcd}$$

(teda V_i je hladké vektorové pole $\forall e_i$).

Podľa lemy 4.2.6 o kolmosti máme $V_j(x) \perp x$ v $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\text{avg}}$, teda zúžená funkcia $V_i \restriction S^N$ zíde na dotykovú varietu sféry. Máme

$$
\begin{tikzcd}
S^N \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, "V_i \restriction S^N"'] & \mathbb{R}^{N+1} \arrow[d, "V_i"'] \\
TS^N \arrow[r, hook] \arrow[u, bend left, "p"] & T\mathbb{R}^{N+1} \arrow[u, bend left, "p"]
\end{tikzcd}
$$

Dokážeme lineárnu nezávislosť (tým pádom aj nenulovosť) vektorových polí v nejakom pevnom bode $x \in S^N$.

Vektory $V_1(x), \ldots, V_n(x)$ sú samozrejme všetky v tom istom vektorovom priestore. Nech mám také $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, že $\sum_{k=1}^n \alpha_k V_k(x) = 0$ počítajme

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^n \alpha_k V_k(x) &= 0 \\
\sum_{k=1}^n \alpha_k (e_k \cdot x) &= 0 \\
(\sum_{k=1}^n \alpha_k e_k) \cdot x &= 0 \\
(\sum_{k=1}^n \alpha_k e_k) \cdot ((\sum_{k=1}^n \alpha_k e_k) \cdot x) &= (\sum_{k=1}^n \alpha_k e_k) \cdot 0 \\
((\sum_{k=1}^n \alpha_k e_k) \cdot (\sum_{k=1}^n \alpha_k e_k)) \cdot x &= 0 \\
-\|\sum_{k=1}^n \alpha_k e_k\| x &= 0
\end{aligned}
$$

Keďže $x \neq 0$, musíme mať $\sum_{k=1}^n \alpha_k e_k = 0$. Keďže ale $\{e_1, \ldots, e_n\}$ bola báza, máme $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0$. □

Koľko teda takých vektorových polí existuje? Vráťme sa ku diskusii pred touto vetou. Majme $\mathbb{R}^{N+1}$ a $N + 1 = 2^a b$.

Ak je N párne, máme $a = 0$. Teda $Cl_{0,0}$ má akciu na $\mathbb{R}^{N+1}$, ale to nám podľa vety 4.3.1 dá nula vektorových polí.

Z vety je vidno, že na každý priestor $\mathbb{R}^{N+1}$, chceme mať akciu čo najväčšou Cliffordovou algebrou (s najväčším p v signatúre), teda nech je b nepárne $N + 1 = 2^a(2c + 1)$. Zoberieme číslo a a hľadáme najväčšiu $Cl_{n,0}$ takú, že má akciu na $\mathbb{R}^{N+1}$.

$N+1$	2^a	$Cl_{n,0}$	n
2	2	$\mathbb{C}$	1
4	4	$\mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$	3
6	2	$\mathbb{C}$	1
8	8	$\mathbb{R}(8) \oplus \mathbb{R}(8)$	7
10	2	$\mathbb{C}$	1
12	4	$\mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$	3
14	2	$\mathbb{C}$	1
16	16	$\mathbb{R}(16)$	8
18	2	$\mathbb{C}$	1
20	4	$\mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$	3
22	2	$\mathbb{C}$	1
24	8	$\mathbb{R}(8) \oplus \mathbb{R}(8)$	7
26	2	$\mathbb{C}$	1
28	4	$\mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$	3
30	2	$\mathbb{C}$	1
32	32	$\mathbb{C}(16)$	9

Vidíme, že platí, že nás na číslach $N+1$ zaujíma iba ich najväčšia druhá mocnina.

Nech máme funkciu $\rho : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, takú, že $\rho(N+1) = n$ ak je Cliffordova algebra $Cl_{n,0}$ najväčšia taká, ktorá má akciu na $\mathbb{R}^{n+1}$. Teda $\rho(N+1) = \rho(2^a)$.

Lema/Definícia 4.3.2. *(Hurwitz-Radonove čísla)[10] Pre funkciu ρ platí, že ak $N+1 = 2^a(2c+1)$, tak $\rho(N+1) = \rho(2^a)$ a zároveň*

$$\rho(2^a) = \begin{cases} 2a & a \equiv 0 \mod 4 \\ 2a-1 & a \equiv 1,2 \mod 4 \\ 2a+1 & a \equiv 3 \mod 4 \end{cases}$$

Táto funkcia, (presnejšie funkcia $\rho+1$) sa volá Hurwitz-Radonova a zaujímavé na nej je, že nevznikla analýzou Cliffordových algebier, ale pri inom kontexte. Detaily sa dajú nájsť napr. tu [10].

Zároveň platí periodicita

$$\rho(2^{a+4}) = \rho(2^a) + 8. \tag{4.1}$$

Na mocninách dvojky $a \geq 1$, ρ nadobúda hodnoty

$$1, 3, 7, 8, 9, 11, 15, 16, 17, 19, 23, 24, 25, 27, 31, \ldots$$ [¶]

Dôkaz. Overíme to pre malé a a potom ukážeme rekurenciu 4.1.

- Nech $a = 0$. Potom $\rho(2^0) = 0 = 2a$.

[¶] Po pripočítaní jednotky je to postupnosť číslo A003485 v OEIS (https://oeis.org/)

- Nech $a = 1$. Potom $\rho(2^1) = 1 = 2a - 1$.
- Nech $a = 2$. Potom $\rho(2^2) = 3 = 2a - 1$.
- Nech $a = 3$. Potom $\rho(2^3) = 7 = 2a + 1$.

Keďže $\rho(2^{a+4}) = \rho(2^a 16)$ z vety o 8-periodicite máme $\rho(2^a) + 8$. □

Platí tento dôležitý výsledok, ktorý tu nevieme ukázať.

Veta 4.3.3 (J. F. Adams [1]). *Lineárne nezávislé vektorové polia hore-skonštruované dosahujú najväčší možný počet takýchto polí na sfére.*

Dôsledok 4.3.4. *Jediné sféry S^N, kde sa dosahuje naivnú horná hranica*

$$\textit{počet} = \dim T_x S^N$$

sú sféry S^1, S^3, S^7 (dvojbodovú sféru S^0 neuvažujeme).

Nakoniec len poznemenáme, že to úzko súvisí s nasledujúcou vetou:

Veta 4.3.5. *(Hurwitzova veta) Každá konečnorozmerná reálna, nie nutne asociatívna, algebra s kladne definitnou kvadratickou formou je jedna z nasledových:*

- *Reálne čísla* (dim = 1).
- *Komplexné čísla* (dim = 2).
- *Kvaternióny* (dim = 4).
- *Tzv. oktonióny, neasociatívna, alternujúca algebra* (dim = 8).

4.4 Párno-rozmerné sféry

Opíšeme bez dôkazov vety, ktoré bránia existencii jediného všade nenulového vektorového poľa na párno-rozmerných sférach S^{2n}.

Pripomeňme si nasledujúci pojem.

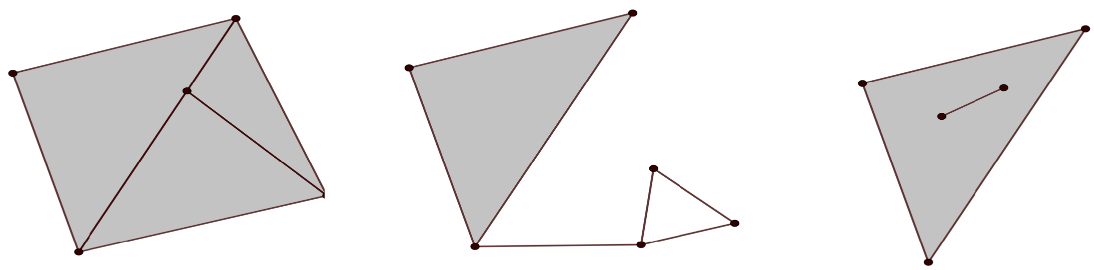
Definícia 4.4.1 (Eulerova charakterictika (špeciálny prípad)). Majme nejaký mnohosten M (špeciálna varieta s dvojrozmernou plochou). Potom Eulerova charakteristika $\chi(M)$ sa počíta ako $\chi(M) = v - e + f$, kde v je počet vrcholov, e je počet hrán a f je počet stien M.

Dá sa napríklad ukázať, že keď si zoberieme ľubovoľné mnohosteny M, N homeomorfné v zmysle variet, tak $\chi(M) = \chi(N)$, hoci to vôbec nie je elementárny výsledok. Ak je M navyše homeomorfné s $S^2 \cong M$, Eulerova charakteristika je $\chi(M) = 2$.

Pod n-simplexom myslíme uzavretú množinu
$\Delta_n = \{x_1, \ldots, x_n | x_1, \ldots, x_n \geq 0, x_1 + \ldots + x_n \leq 1\} \subset \mathbb{R}^n$.

Je dôležité, že Δ_n má na svojom povrchu pekne uložených $n+1$ Δ_{n-1} simplexov. Napríklad trojuholník Δ_2 má 3 úsečky Δ_1 ako hrany.

Triangulácia n-rozmernej variety M je intuitívne povedané konečné vyplnenie celej M simplexami $\Delta_0, \ldots, \Delta_n$ pekným spôsobom. Keď tam je nejaký simplex Δ_i pre $i \geq 1$, sú tam aj všetky menšie simplexy na jeho hranici. Žiadny simplex tam nie je duplicitne. Tu sú nejaké príklady škaredých vyplnení:



Obr. 4.6: „Škaredé triangulácie“

Definícia 4.4.2 (Eulerova charakteristika)**.** Majme n-rozmernú triangulovanú varietu M. Potom jej Eulerovu charakteristiku vypočítame nasledovne

$$\chi(M) = \#\Delta_0 - \#\Delta_1 + \#\Delta_2 - \#\Delta_3 + \ldots \pm \#\Delta_n$$

.

Definícia 4.4.1 bol špeciálny prípad tejto definície .

Veta 4.4.3 (Špeciálny prípad Poincaré–Hopfovej vety)**.** *Majme kompaktnú hladkú varietu M. Potom ak existuje všade nenulové hladké vektorové pole na M, tak $\chi(M) = 0$, kde $\chi(M)$ je Eulerova charakteristika M.*

Ale platí:

Lema 4.4.4. *Platí, že S^n je triangulovateľná a $\chi(S^n) = 1 + (-1)^n$.*

Dôkaz. Sféra S^n sú dva Δ_n, ktorým sa zlepili ich povrchy dokopy, teda menšie simplexy v Δ_n sa nalepili dokopy. Dá sa odvodiť, že v Δ_n je $\#\Delta_m = \binom{n+1}{m+1}$. V S^n bude $\#\Delta_n = 2$ Budeme používať známu identitu $\sum_{k=0}^{n+1}(-1)^k\binom{n+1}{k} = 0$.

$$\begin{aligned}
\chi(S^n) &= \\
&= \binom{n+1}{1} - \binom{n+1}{2} + \ldots + (-1)^{n+1}\binom{n+1}{n} + (-1)^n 2 = \\
&= (-1)^n 2 - 0 + \binom{n+1}{0} + (-1)^{n+1}\binom{n+1}{n+1} = 1 + (-1)^n
\end{aligned}$$

□

Takže Poincaré-Hopfova veta zakazuje mať hladké všade nenulové vektorové polia párnorozmerným sféram.

Literatúra

[1] ADAMS, John Frank. *Vector fields on spheres*, Annals of Mathematics 75, 1962, p. 603-632.

[2] ATIYAH, Michael - Macdonald, Ian G. *Introduction To Commutative Algebra*, Addison-Wesley Series in Mathematics. Colorado: Westview Press, 1994. p. 24-31, ISBN-13: 978-0201407518

[3] BRÖCKER, Theodor - JÄNICH, Klaus. *Introduction to Differential Topology*, Cambridge: Cambridge University Press, 1st edition, 1982, ISBN 0521284708.

[4] FECKO, Marián. *Differential Geometry and Lie Groups for Physicists*, Cambridge:Cambridge University Pressn, Reissue edition , 2011. p. 23-25, ISBN 978-0521187961

[5] GALLIER, Jean H. *Clifford Algebras, Clifford Groups, and a Generalization of the Quaternions: The Pin and Spin Groups*, 2013, [ONLINE] https://repository.upenn.edu/cis_reports/664/ (cit. 10.5.2019)

[6] JÄNICH, Klaus. *Topology*, Graduate Texts in Mathematics, New York: Springer-Verlag New York Inc., 2nd Edition, 1994. p. 1-23.

[7] KORBAŠ, *Július, Prednášky z lineárnej algebry a geometrie*, Bratislava: Vydavateľstvo UK, 2013.

[8] LANG, Serge. *Algebra*, Graduate Texts in Mathematics, New York: Springer-Verlag New York Inc., 2012. p.641-657, ISBN 1461265517.

[9] LAWSON, H. Blaine - MICHELSOHN, Marie-Louise. *Spin Geometry*, Princeton mathematical series: 38. Princeton: Princeton University Press, 1989. p. 1-45, ISBN 978-0691085425.

[10] OVSIENKO, Valentin - TABACHNIKOV, Serge. *Hopf Fibrations and Hurwitz-Radon numbers.* Springer Science+Business Media New York, Vol. 38, n. 4, 2016. [ONLINE] http://ovsienko.perso.math.cnrs.fr/Publis/Hopf1.pdf (cit. 10.5.2019)

[11] PORTEOUS, Ian R., *Clifford Algebras and the Classical Groups*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 1st ed. Cambridge: Cambridge University Press, 1995. , ISBN 978-0521551779.

Všetky obrázky boli vyrobené mnou v online editore *GeoGebra.* [online] https://www.geogebra.org/apps/ (použité Apríl 2019).